およそ 100 ページで学ぶ微分積分学

中西敏浩

1　関数の極限

1.1　実数

この講義では実数直線のある区間 (右端が $+\infty$, 左端が $-\infty$ の場合もある）で定義された関数を扱う。ところで実数とは実数の集合の元のことである。大阪人の集まりが大阪なのではなく，大阪に住んでいる人を大阪人と呼ぶようなものである。そして実数の集合とは直観的には直線上の点の集合ということになろう。直線という実数の集まりの総体があって，その元として実数を捉えているのである。実数が有理数と無理数とから成り立っているのは事実だが，正確には実数の集合とその部分集合の有理数の集合があって，有理数の集合の補集合の元が無理数である。

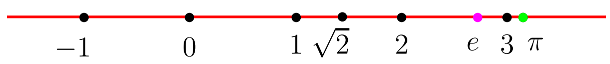

図 1.1　実数直線:右にも左にも無限に延びることを想像力で補うこと

実数を理解する助けになるのは小数展開である。つまり，実数とは

$$m.a_1a_2a_3\cdots$$

(m は整数。10 進法ならば，a_n は 0,1,..., 9 のどれか) で表される「数」である。ただし，すべての a_n を知ることはできないので，こうした「数」を実在するものとするには想像をたくましくしないといけない。しかし，想像をたくましくしなくても $\sqrt{2}$–これは有限小数にも循環小数にも展開できない–を辺の長さが 1 の正方形の対角線の長さとしてすんなり受け入れることができる。そのことと $\sqrt{2}$ の展開 $1.41421356\cdots$ の全貌を知ることは別の話である（全貌を知っている人は多分一人もいないだろう)。自然対数の底 e のように初等幾何学的イメージと無縁な実数もある。

実数を舞台とするからには，実数についてもっと詳しく述べないといけないし，それを述べるための実数の集合 $\mathbb{R}$ の公理論的特徴づけが存在することには存在するが，この講義ではそこにまで深入りしない。皆さんがもっているナイーブな (というのは直線とは何かいうのも厄介だから) 直線のイメージを手がかりにこの講義を聴いていただければと思います。以下の不等式はこの後よく使う。

補題 1.1　絶対値については次の三角不等式が成り立つ。($\leqq, \geqq$ を $\leq, \geq$ と書くことにする。)

$$||a|-|b|| \leq |a+b| \leq |a|+|b| \tag{1.1}$$

1.2　関数の極限

点 a を含む開区間 $I=(\alpha,\beta)$ $(\alpha<a<\beta)$ を考える。関数 $f(x)$ は I から a を除いた集合で定義されているとする。さて「x が a に近づく」というのは実直線上でのことなので問題はないだろう（a に右から近づくか，左から近づくかの違いを区別することもできるが)。しかし $f(x)$ はオニヤンマのように実直線上を行ったり来たりすることも考えられる。

定義 1.1　x が a に (限りなく) 近づくとき $f(x)$ が b を極限値にもつとは，どんなに小さい正数 ϵ をとっても，x が a を含むある区間 $(a-\delta, a+\delta)$ $(\delta > 0)$ にある限り (すなわち $|x-a| < \delta$ である限り)

$$|f(x) - b| < \epsilon \tag{1.2}$$

が成り立つときにいう。このことを次で表す。

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

1.3　右極限・左極限

定義 1.2　(1) $f(x)$ を区間 (a, β) で定義された関数とする。x が a に近づくとき $f(x)$ が b を右極限値にもつとは，どんなに小さい正数 ϵ をとっても，x がある区間 $(a, a+\delta)$ $(\delta > 0)$ にある限り (すなわち $a < x < a+\delta$ である限り) (1.2) が成り立つときにいう。このことを次で表す。

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b.$$

(2) $f(x)$ を区間 (α, a) で定義された関数とする。x が a に近づくとき $f(x)$ が b を左極限値にもつとは，どんなに小さい正数 ϵ をとっても，x がある区間 $(a-\delta, a)$ $(\delta > 0)$ にある限り (すなわち $a-\delta < x < a$ である限り) (1.2) が成り立つときにいう。このことを次で表す。

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b.$$

たとえば，$f(x) = [x]$ ($[x]$ で x 以下の最大の整数とする。すなわち $x = n + r$ (n は整数，$0 \leq r < 1$) のとき，$[x] = n$) とおくと，$\lim_{x \to +0} f(x) = 0$，$\lim_{x \to -0} f(x) = -1$ である[*1]。定義 1.1 において

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

であることと

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b \text{ かつ } \lim_{x \to a-0} f(x) = b$$

は同じである。

1.4　連続関数

定義 1.3　点 a を含む開区間 I で定義された関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

をみたすときにいう。

例題 1.1　$f(x) = x^2$ は $x = 1$ で連続であることを示せ。

ϵ を $\epsilon < 1$ をみたす任意の正数とする。$|x-1| < \epsilon/3 (< 1)$ のとき，$|x+1| = |(x-1)+2| \leq |x-1| + 2 < 3$ だから

$$|f(x) - f(1)| = |x^2 - 1| = |x+1||x-1| < 3 \times \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

[*1] $a = 0$ のときは $\lim_{x \to 0+0}$，$\lim_{x \to 0-0}$ を $\lim_{x \to +0}$，$\lim_{x \to -0}$ と書く。

よって $\delta = \epsilon/3$ とおけばよい。つまり

$$|x-1| < \frac{1}{300} \text{ ならば } |x^2-1| < \frac{1}{100}$$
$$|x-1| < \frac{1}{30000000} \quad \text{ならば } |x^2-1| < \frac{1}{10000000}$$

δ の選び方は $\epsilon/3$ 以外にも考えられるが，(1.1) をみたす δ が見つかりさえすればよいのであまり凝った計算をしないように。

例題 1.2　$f(x)$ が $x=a$ で連続であれば，$|f(x)|$ も $x=a$ で連続であることを示せ。

仮定により，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して $|f(x)-f(a)| < \epsilon$. このとき，

$$||f(x)| - |f(a)|| \le |f(x)-f(a)| < \epsilon.$$

定義 1.4　区間 I のすべての点で $f(x)$ が連続であるとき $f(x)$ は連続であるという。閉区間 $[a,b]$ で定義された関数 $f(x)$ が連続であるとは,(a,b) で連続であり，かつ $\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$, $\lim_{x\to b-0} f(x) = f(b)$ が成り立つときにいう。半開区間で定義された関数の連続性も同様に定める。

例 1

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1. \tag{1.3}$$

三角関数の微分法のところで述べるように θ は弧度法で考えている。したがって下の左図の弧 AC の長さは 2θ である。

$$\text{弧 } AC = 2\theta, \quad \text{線分 } AC = 2\sin\theta.$$

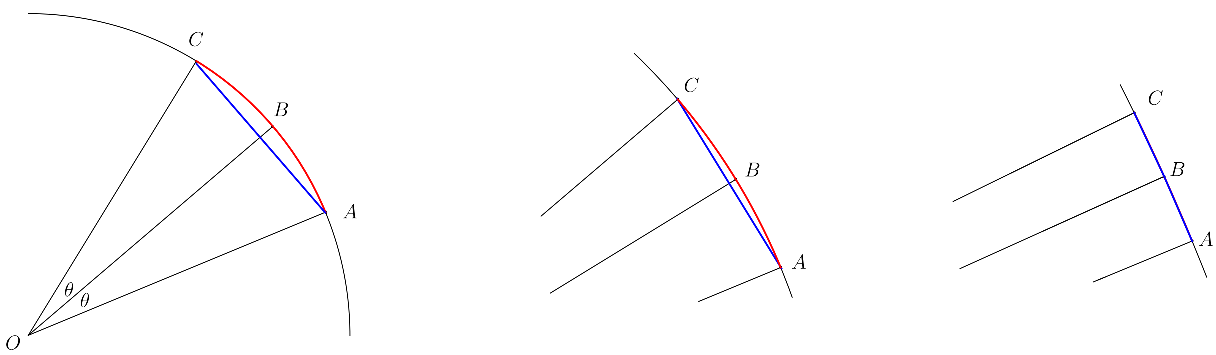

図 1.2　右に移るにつれて θ は小さくなる。

さて円を地球の赤道ぐらい大きくとってその半径 (約 6,378km) を 1 単位だと思う。古代人がそうであったように，B 地点にいる人にとってごくまわりの世界は地球は平面に赤道は直線にしか見えないだろう。だとすると θ が小さければ A と C はその直線上の点であり，そうならば 弧 AB = 線分 AB. よって (1.3) が成り立つ[*2]。

[*2] そもそも曲線 (今の場合は円弧) の長さとは何かという問題がある。もちろん，こんな説明で論理的に説得できるとは思っていない。

例題 1.3　$\sin x$ と $\cos x$ は連続関数であることを示せ。

$$\lim_{x\to 0}\sin x = \lim_{x\to 0} x\frac{\sin x}{x} = 0\times 1 = 0 = \sin 0$$

ゆえ $\sin x$ は $x=0$ において連続である。任意の点 a に対して

$$|\sin x - \sin a| = \left|2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|,$$

$$|\cos x - \cos a| = \left|2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{a-x}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|.$$

したがって

$$\lim_{x\to a}\sin x = \sin a, \quad \lim_{x\to a}\cos x = \cos a.$$

1.5　問題

問題 1　次の関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であることを示せ。

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

解答. $x\neq 0$ のとき

$$-|x| \leq \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|.$$

したがって

$$\lim_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right| = 0 \text{ よって } \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

問題 2　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

解答.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

図 1.3　おつかれ〜

2 微分可能性

2.1 微分可能性

定義 2.1 $f(x)$ を点 a を含む開区間で定義された関数とする。定数 c が存在して

$$c = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{2.1}$$

であるとき，$f(x)$ は a で微分可能であるという。c を a における $f(x)$ の微分係数といい

$$c = f'(a) = \frac{df}{dx}(a) \tag{2.2}$$

で表す。

よって $\epsilon(x)$ を

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \epsilon(x) \tag{2.3}$$

で定めると，$\epsilon(x)$ は $x = a$ で次の条件 S[*3]をみたす。

$$\text{(S)} \qquad \epsilon(a) = 0\ , \ \lim_{x \to a} \frac{\epsilon(x)}{x - a} = 0.$$

第 2 の条件は $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{\epsilon(x)}{|x - a|} = 0$ または $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{|\epsilon(x)|}{|x - a|} = 0$ で置き換えてもよい。$\epsilon(x)$ が条件 S をみたすとき

$$\lim_{x \to a} \epsilon(x) = \lim_{x \to a} (x - a) \frac{\epsilon(x)}{x - a} = 0. \tag{2.4}$$

例 2 $f(x) = x^2$ とする。実数 a に対して

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 + (x^2 - a^2) = a^2 + (x + a)(x - a) \\ &= a^2 + (2a + x - a)(x - a) \\ &= a^2 + 2a(x - a) + (x - a)^2 \end{aligned}$$

ここで $\epsilon(x) = (x - a)^2$ は $x = a$ で条件 S をみたす。よって $f(x)$ は $x = a$ で微分可能で $f'(a) = 2a$. n を正整数とし，$f(x) = x^n$ とする。実数 a に対して

$$\begin{aligned} x^n &= a^n + (x^n - a^n) = a^n + (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})(x - a) \\ &= a^n + \left\{ na^{n-1} + (x^{n-1} - a^{n-1}) + a(x^{n-2} - a^{n-2}) + \cdots + a^{n-2}(x - a)) \right\}(x - a) \\ &= a^n + na^{n-1}(x - a) + \epsilon(x). \end{aligned}$$

ここで $\epsilon(x) = \left\{ (x^{n-1} - a^{n-1}) + a(x^{n-2} - a^{n-2}) + \cdots + a^{n-2}(x - a)) \right\}(x - a)$ ($n = 1$ のときは $\epsilon(x) = 0$) は $x = a$ で条件 S をみたす。よって $f(x)$ は $x = a$ で微分可能で $f'(a) = na^{n-1}$.

次が (2.3) と (2.4) からしたがう。

定理 2.1 関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば，$f(x)$ は $x = a$ で連続である。

[*3] 「条件 S」はこのノートでの用語なので，他所で無定義のままで使ってはいけない。

2.2 微分法の公式

$f(x)$ と $g(x)$ はともに $x=a$ で微分可能であるとする。したがって

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \epsilon_1(x)$$
$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \epsilon_2(x)$$

とおくと $\epsilon_1(x)$ と $\epsilon_2(x)$ は条件 S をみたす。α と β を定数とすると $\alpha\epsilon_1(x) + \beta\epsilon_2(x)$ は条件 S をみたすから

補題 2.1 $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ は $x=a$ で微分可能で $h'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$.

$$f(x)g(x) = f(a)g(a) + (f'(a)g(a) + f(a)g'(a))(x-a) + \epsilon(x).$$

ここで

$$\epsilon(x) = f'(a)g'(a)(x-a)^2 + (f(a) + f'(a)(x-a))\epsilon_2(x) + (g(a) + g'(a)(x-a))\epsilon_1(x)$$

は条件 S をみたすから

補題 2.2 $k(x) = f(x)g(x)$ は $x=a$ で微分可能で

$$k'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \tag{2.5}$$

$g(a) \neq 0$ とする。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g(x)} &= \frac{1}{g(a) + g'(a)(x-a) + \epsilon_2(x)} = \frac{1}{g(a)}\frac{1}{1+A(x)} \qquad \left(A(x) = \frac{g'(a)(x-a) + \epsilon_2(x)}{g(a)}\right) \\
&= \frac{1}{g(a)}\left(1 - A(x) + \frac{A(x)^2}{1+A(x)}\right) \\
&= \frac{1}{g(a)} - \frac{g'(a)}{g(a)^2}(x-a) + \epsilon(x).
\end{aligned}$$

ここで

$$\epsilon(x) = -\frac{\epsilon_2(x)}{g(a)^2} + \frac{1}{g(a)}\frac{A(x)^2}{1+A(x)}$$

は条件 S をみたすから

補題 2.3 $\ell(x) = 1/g(x)$ は $x=a$ で微分可能で

$$\ell'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}. \tag{2.6}$$

$m(x) = f(x)/g(x)$ とおくと (2.5) と (2.6) により

$$m'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\left(-\frac{g'(a)}{g(a)^2}\right) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}. \tag{2.7}$$

2.3　片側微分係数

定義 2.2　$f(x)$ を区間 $[a,b)$ で定義された関数とする。x が $x>a$ をみたしながら a に近づくときの極限 (右極限)

$$c = \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{2.8}$$

が存在するとき，$f'_+(a)=c$ を $f(x)$ の $x=a$ における右側微分係数という。

$f(x)$ を区間 $(b,a]$ で定義された関数とする。x が $x<a$ をみたしながら a に近づくときの極限 (左極限)

$$d = \lim_{x\to a-0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{2.9}$$

が存在するとき，$f'_-(a)=d$ を $f(x)$ の $x=a$ における左側微分係数という。

命題 2.1　点 a を含む開区間で定義された関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるための必要十分条件は，$f'_+(a)$ と $f'_-(a)$ が存在して，$f'_+(a)=f'_-(a)$ をみたすことである。

2.4　導関数

開区間 I で定義された関数 $f(x)$ が I の各点で微分可能ならば，$f(x)$ の**導関数** $f'(x)$ $\left(\dfrac{df}{dx}(x)\right)$ が定義される。$f(x)$, $g(x)$ が I の各点で微分可能ならば，次が成り立つ。

$$\frac{d(\alpha f+\beta g)}{dx}(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x) \quad (\alpha,\ \beta \text{ は定数}), \tag{2.10}$$

$$\frac{d(fg)}{dx}(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \tag{2.11}$$

$$\frac{d(f/g)}{dx}(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \tag{2.12}$$

2.5　問題

問題 3　微分可能な関数 $f(x)$ に対して，次の極限値を求めよ。

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+3h)-f(x-2h)}{h}$$

解答.

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+3h)-f(x))-(f(x-2h)-f(x))}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}3\left(\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}\right)-\lim_{h\to 0}(-2)\left(\frac{f(x-2h)-f(x)}{-2h}\right)\\
&= \lim_{k\to 0}3\left(\frac{f(x+k)-f(x)}{k}\right)-\lim_{h\to 0}(-2)\left(\frac{f(x+\ell)-f(x)}{\ell}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k=3h,\ell=-2h \text{ とおいた})\\
&= 3f'(x)-(-2)f'(x)\\
&= 5f'(x)
\end{aligned}
$$

問題 4　関数

$$
f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 1\\ ax+b & x<1\end{cases}
$$

が $x=1$ で微分可能になるように定数 a,b を定めよ。

解答. $f(x)$ は $x=1$ で微分可能だから, $x=1$ で連続でないといけない。よって

$$
\lim_{x\to 1-0}f(x)=1=a+b=\lim_{x\to 1+0}f(x).
$$

よって

$$
b=1-a.
$$

右側微分係数と左側微分係数を求める。

$$
\begin{aligned}
f_+(1) &= \lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{(ax+b)-(a+b)}{x-1}=a,\\
f_-(1) &= \lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-1}{x-1}=2.
\end{aligned}
$$

$f(x)$ が $x=1$ で微分可能ならば右側微分係数と左側微分係数が一致するので $a=2$. したがって $b=-1$.

図 2.1　おつかれ～

3　微分法の基本定理

3.1　合成関数の微分

関数 $y = g(x)$ の値域が関数 $f(y)$ の定義域に含まれるとき，**合成関数** $f(g(x))$ が定義できる。

例題 3.1　$g(x) = 1 - x^2$, $f(y) = \sqrt{y}$ とおくとき，合成関数 $f(g(x))$ の定義域を求めよ。

解答. $f(y)$ の定義域は $y \geq 0$ である。一方 $g(x) \geq 0$ が成り立つのは $-1 \leq x \leq 1$ のときだから，合成関数 $f(g(x))$ は $-1 \leq x \leq 1$ でないと定義できない。よって $f(g(x))$ の定義域は区間 $[-1, 1]$.

メモ 3.1　$g(x) = -1 - x^2$, $f(y) = \sqrt{y}$ とおくとき，$g(x) < 0$ だから合成関数 $f(g(x))$ はいかなる点においても定義できない。このようなときは「合成関数は定義できない」と答えてもよいが,「合成関数の定義域は空集合 $\emptyset$ である」と答えてもよい。

点 a を含む開区間 I で定義された関数 $g(x)$ は a で微分可能であり，点 $b = g(a)$ を含む開区間で定義された関数 $f(y)$ は b で微分可能であるとする，$g(x)$ は $x = a$ で連続だから，a を含むある開区間 $(\subset I)$ で合成関数 $f(g(x))$ が定義できる。仮定により

$$\begin{aligned} f(y) &= f(b) + f'(b)(y-b) + \epsilon_1(y) \\ g(x) &= g(a) + g'(a)(x-a) + \epsilon_2(x) \end{aligned}$$

とおくと $\epsilon_1(y)$ と $\epsilon_2(x)$ はそれぞれ $y = b$ と $x = a$ において条件 S をみたす。このとき

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(a)) + f'(g(a))(g(x) - g(a)) + \epsilon_1(g(x)) \ (\because b = g(a)) \\ &= f(g(a)) + f'(g(a)) \left\{ g'(a)(x-a) + \epsilon_2(x) \right\} + \epsilon_1(g(x)) \\ &= f(g(a)) + f'(g(a))g'(a)(x-a) + \epsilon(x), \end{aligned}$$

ここで, $\epsilon(x) = f'(g(a))\epsilon_1(x) + \epsilon_2(g(x))$.　すると

$$\frac{\epsilon(x)}{x-a} = \begin{cases} f'(g(a))\dfrac{\epsilon_1(x)}{x-a} + \dfrac{\epsilon_2(g(x))}{g(x)-g(a)}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} & (g(x) \neq g(a) \text{ のとき}) \\ \\ f'(g(a))\dfrac{\epsilon_1(x)}{x-a} & (g(x) = g(a) \text{ のとき}) \end{cases}$$

で $x \to a$ のとき，$g(x) \to g(a)$ だから $\epsilon(x)$ は条件 S をみたす。

定理 3.1（Chain Rule）　上の設定のもとで合成関数 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ は $x = a$ で微分可能で

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a). \tag{3.1}$$

系 3.1　微分可能な 2 つの関数 $g(x)$ と $f(y)$ の合成関数 $f(g(x))$ が定義できるとき,

$$(f(g(x))' = f(g(x)) \cdot g'(x). \quad (\cdot \text{ は積 } (\times)). \tag{3.2}$$

例題 3.2　$f(x)$ が微分可能であるとき，次の関数を微分せよ。

$$\left\{ f(x) + \frac{1}{f(x)} \right\}^2$$

解答. $z = g(y) = y + \dfrac{1}{y}$, $h(z) = z^2$ とおくと上の関数は 3 つの関数の合成関数 $h(g(f(x)))$ である。合成関数の微分の公式を繰り返して用いると

$$\begin{aligned}(h(g(f(x))))' &= h'(g(f(x)) \cdot (g(f(x)))' \\ &= h'(g(f(x)) \cdot g'(f(x))) \cdot f'(x). \end{aligned} \tag{3.3}$$

ここで

$$g'(y) = 1 - \frac{1}{y^2}, \quad h'(z) = 2z$$

だから，(6.2) は

$$\begin{aligned}(h(g(f(x))))' &= 2\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{f(x)^2}\right) \cdot f'(x) \\ &= 2\left(f(x) - \frac{1}{f(x)^3}\right) f'(x).\end{aligned}$$

3.2 逆関数の微分

定義 3.1　関数 $f(x)$ に対して，$y = f(x)$ のときに $x = g(y)$ の関係をもつ関数 $g(y)$ を $f(x)$ の**逆関数**という。

メモ 3.2　関数 $f(x)$ の逆関数を $f^{-1}(y)$ で表すが，この書き方は推奨されない。$1/f(x)$ と混同される可能性があるから。次回以降にでてくる指数関数 e^x の逆関数は $\log x$.　三角関数の逆関数は $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ より，$\arcsin x$, $\arccos x$ のほうがよい。

区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して，$f(x)$ の連続な逆関数 $g(y)$ が存在するためには，$f(x)$ は $[a, b]$ で単調増加，あるいは単調減少でなければいけない。

例えば，図 3.1 は $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$ のグラフ。$f(x)$ は $x \geq 1$ で単調増加だから $f(x)$ の逆関数 $g(y)$ が定義される (図 3.1 の左図と図 3.2 を参照)。しかし，区間 $(-2, 5/2)$ では一つの値 b に対して $f(x) = b$ となる x が 2 つ a_1, a_2 があって (図 3.1 の右図)，$g(b)$ に a_1, a_2 のどちらを対応させてよいのかわからないので逆関数 $g(y)$ はうまく定義できない。

例題 3.3　点 2 を含み，かつ $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$ の逆関数 $g(y)$ が存在するような $f(x)$ の最大の定義域を求めよ。

解答. (後で説明することになる知識を仮定する）$f'(x) = 6(x-1)(x+2)$ ゆえ，増減表をつくると $f(x)$ は $(-\infty, -2]$ で単調増加，$[-2, 1]$ で単調減少，$[1, +\infty)$ で単調増加. これらのなかで 2 を含む区間は $[1, +\infty)$ だから，求める区間は $[1, +\infty)$. 下の左図の赤色で示した区間。そこで定義された $f(x)$ の逆関数 $g(y)$ のグラフが右の図の赤の曲線。$g(y)$ の定義域は $[-10, +\infty)$.

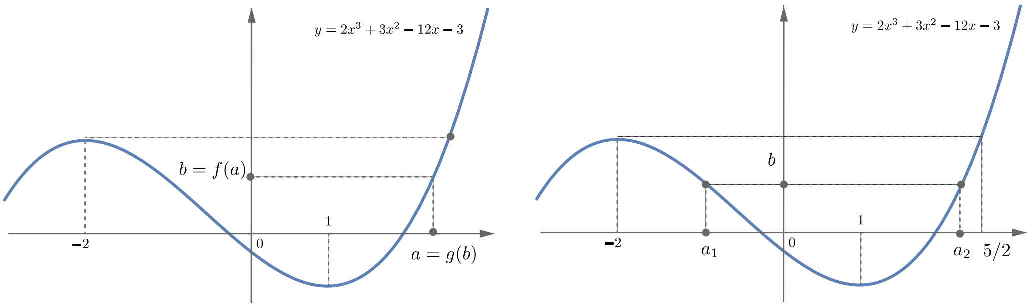

図 3.1　$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$ のグラフ

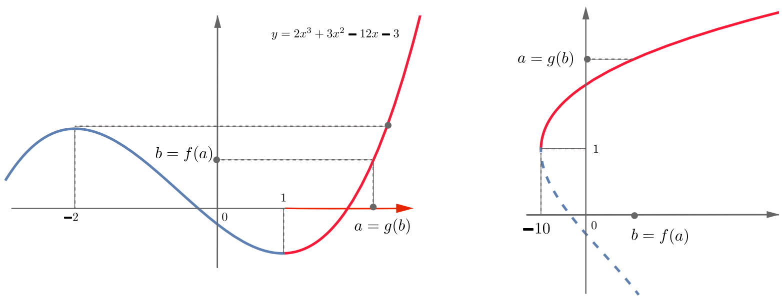

図 3.2　区間 $[1, +\infty)$ で $f(x)$ は逆関数をもつ。

微分可能な関数 $y = f(x)$ が $f'(a) \neq 0$ をみたすとする。さらに $f(x)$ が逆関数 $x = g(y)$ をもつとする。$b = f(a)$, よって $a = g(b)$ とおく。$y = f(x)$ のグラフと $x = g(y)$ のグラフは同じ曲線だから

$$y = f'(a)(x - a) + b \quad (y = f(x) \text{ の } (a, b) \text{ における接線})$$

$$\Downarrow \ (\text{上の式を } x \text{ について解く})$$

$$x = \frac{1}{f'(a)}(y - b) + a \quad (x = g(y) \text{ の } (a, b) \text{ における接線})$$

の関係より，

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} \tag{3.4}$$

である。実際，$f'(a) \neq 0$ のとき，a を含む十分小さな開区間 I で $f'(x)$ は $f'(a)$ と同じ符号をもつから，そこで単調増加または減少である (第 4 章参照)。よって $x \in I - \{a\}$ ならば $f(x) \neq f(a)$. 逆関数の性質から

$$\lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \lim_{y \to b} \frac{x - a}{f(x) - f(a)}.$$

$g(x)$ の連続性から $y \to b$ のとき $x \to a$ だから 3.4 を得る。a を変数 x に置き換えると次の導関数の間の関係を得る。

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \tag{3.5}$$

定理 3.2　微分可能でかつ $f'(x) \neq 0$ をみたす関数 $f(x)$ の逆関数 $g(y)$ が存在するとき，

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad (ただし，y = f(x)) \tag{3.6}$$

例題 3.4　$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$ は $[1, \infty)$ で単調増加だから，その逆関数 $g(y)$ が存在する。$g(y)$ の $y = 1$ における微分係数 $g'(1)$ を求めよ。

解答. $2 \in (1, +\infty)$ において $f(2) = 1$ である。$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$ だから $f'(2) = 24$. (6.3) により

$$g'(1) = g'(f(2)) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{24}.$$

3.3　べき関数

$f(x) = x^n$ (n は正整数) の逆関数は

$$g(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}.$$

ただし，y は x に置き換えた。n が偶数の場合は $x < 0$ で $\sqrt{x}$ は虚数になるので ≥ 0 とする。

$$\begin{aligned}
g'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}})(x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}} a^{\frac{1}{n}} + \cdots + x^{\frac{1}{n}} a^{\frac{n-2}{n}} + a^{\frac{n-1}{n}})}{(x-a)(x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}} a^{\frac{1}{n}} + \cdots + x^{\frac{1}{n}} a^{\frac{n-2}{n}} + a^{\frac{n-1}{n}})} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{x - a}{(x-a)(x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}} a^{\frac{1}{n}} + \cdots + x^{\frac{1}{n}} a^{\frac{n-2}{n}} + a^{\frac{n-1}{n}})} \\
&= \frac{1}{n a^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n} - 1}.
\end{aligned}$$

a を変数 x に置き換えると導関数

$$(x^{1/n})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}.$$

を得る。定理 3.2 を用いて同じことを導くことができる。$x = g(y) = y^{1/n}$ とおくと

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{n x^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n} - 1}.$$

気になるなら変数 y を x に変えればよい。有理数 m/n (n は正整数) のべきのときは $x^{\frac{m}{n}}$ を $f(x) = x^m$ と $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ の合成関数とみて

$$\begin{aligned}
(x^{\frac{m}{n}})' &= f'(x^{\frac{1}{n}}) g'(x) = m (x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1} \\
&= \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1}
\end{aligned}$$

定理 3.3　任意の有理数 α に対して

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{3.7}$$

(3.7) は $\alpha = 0$ のとき，すなわち，$x^0 = 1$(定数関数) のときも，右辺を $0 \times x^{-1} = 0$ とみれば正しい。

例題 3.5　$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$ の導関数を求めよ。

解答.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(2x)(x^2+a^2)^{-1/2} \cdot x - (x^2+a^2)^{1/2}}{x^2} = -\frac{a^2}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}.$$

3.4　問題 (微分法の基本定理)

問題 5　$g(x) = 3 + 2x - x^2$, $f(y) = \sqrt{y}$ とおくとき，合成関数 $f(g(x))$ の定義域を求めよ。

解答.　$[-1, 3] = \{x : -1 \leq x \leq 3\}$.
(理由）$g(x) = (3-x)(x+1)$ ゆえ，$g(x) \geq 0$ をみたすのは $-1 \leq x \leq 3$.

問題 6　a, b, c, d は定数で $ad - bc = 1$ をみたすとする。次の関数を微分せよ (簡潔な形で答えないといけない)。

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^2$$

解答. $2\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = 2 \cdot \dfrac{ax+b}{cx+d} \cdot \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2} = \dfrac{2(ax+b)}{(cx+d)^3}$

注： $ad - bc = 1$ という条件があるので，これは使わないといけない。

問題 7　点 0 を含み，かつ $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$ の逆関数 $g(y)$ が存在するような $f(x)$ の最大の定義域を求めよ（上の図や例題 3 の解答の計算結果を用いてよい。）

解答. $[-2, 1]$
(理由）$f(x)$ が区間で逆関数をもつためには，その区間上で単調増加あるいは単調減少でなければいけない。
$f'(x) = 6(x-1)(x+2)$ ゆえ，$f(x)$ が単調増加あるいは単調減少である区間は $(-\infty, -2]$, $[-2, 1]$, $[1, +\infty)$.
このうち 0 を含むのは $[-2, 1]$.

問題 8　$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$ は $[-2, 1]$ で単調減少だから，その逆関数 $g(y)$ が存在する。$g(y)$ の $y = 10$ における微分係数 $g'(10)$ を求めよ。$f(-1) = 10$ である.

解答. $\dfrac{1}{12}$
(理由）$g(y)$ を $f(x)$ の逆関数で $b = f(a)$ のとき，$g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.　$f'(x) = 6(x-1)(x+2)$ だったから，
$f'(-1) = -12$. よって $g'(10) = \dfrac{1}{f'(-1)} = -\dfrac{1}{12}$

問題 9　$f(x) = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{1/2}$ $(|x| < 1)$ の導関数を求めよ。

解答. $-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(理由）$\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(1-x^2)' = \dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

図 3.3　おつかれ〜

4　微分法の応用

4.1　平均値の定理

定理 4.1（ロルの定理）　区間 $[a, b]$ で連続で (a, b) で微分可能な関数 $f(x)$ に対して $f(a) = f(b)$ ならば，ある c $(a < c < b)$ が存在して $f'(c) = 0$.

定理 4.2（ラグランジュの平均値の定理）　区間 $[a, b]$ で連続で (a, b) で微分可能な関数 $f(x)$ に対して，ある c $(a < c < b)$ が存在して

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{4.1}$$

証明.

$$F(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right)$$

とおく (括弧 (　) の中は $(a, f(a))$ と $(b, f(b))$ を通る直線を表す関数) $F(a) = F(b) = 0$ より，ロルの定理が使えてある c $(a < c < b)$ が存在して $F'(c) = 0$. すなわち

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

定理 4.3（コーシーの平均値の定理）　区間 $[a, b]$ で連続で (a, b) で微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して $g'(x) \neq 0$ $(a, x < b)$ とする。このとき，ある c $(a < c < b)$ が存在して

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{4.2}$$

コーシーの平均値の定理は後の「不定形の極限」（ロピタルの定理）とテイラー展開の章で扱う。

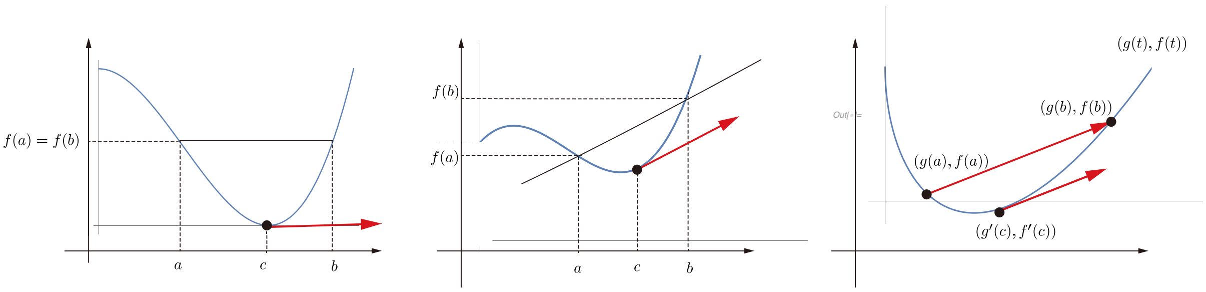

図 4.1　平均値の定理の概念図　左からロルの定理，ラグランジュの平均値の定理，コーシーの平均値の定理

4.2　平均値の定理の応用

補題 4.1　区間 $[a,b]$ で連続で (a,b) で微分可能な関数 $f(x)$ が，すべての $x\in(a,b)$ に対して $f'(x)=0$ をみたすならば $f(x)$ は定数である。

証明. $a<x\leq b$ とする。平均値の定理より ξ $(a<\xi<x)$ が存在して

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi).$$

仮定により $f'(\xi)=0$ だから $f(x)=f(a)$.

4.3　平均値の定理の応用–関数の増減

定義 4.1（**単調減少・単調増加**）　ある区間で定義された関数 $f(x)$ が

$a<b$ ならば $f(a)<f(b)$ をみたすとき，単調増加であるという。
$a<b$ ならば $f(a)>f(b)$ をみたすとき，単調減少であるという。

定理 4.4　$f(x)$ が微分可能で常に $f'(x)>0$ ならば $f(x)$ は単調増加。$f'(x)<0$ ならば $f(x)$ は単調減少。

証明. 常に $f'(x)>0$ が成り立つとする。定義区間の点 a,b $(a<b)$ に対して，ラグランジュの平均値の定理より，ある c $(a<c<b)$ が存在して

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)>0. \tag{4.3}$$

よって $f(b)>f(a)$. 常に $f'(x)<0$ が成り立つときは上の不等号の向きが逆になって $f(b)<f(a)$.

応用例 (極値)
$f'(c)=0$ であるとする。ある a,b $(a<c<b)$ が存在して

$a<x<c$ で $f'(x)>0$, $c<x<b$ で $f'(x)<0$ ならば，$f(c)$ は極大値
$a<x<c$ で $f'(x)<0$, $c<x<b$ で $f'(x)>0$ ならば，$f(c)$ は極小値

例題 4.1　関数

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$$

を考える。次の問いに答えよ。（もし極大値が 2 つ以上あるときはそれらをすべて答えよ。もし極大値が存在しないときは「極大値なし」と答える。極小値についても同様。）

(1)　$f(x)$ の増減表を作成せよ。
(2)　$f(x)$ の極大値を求めよ。
(3)　$f(x)$ の極小値を求めよ。

解答

(1) $f'(x) = -\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$ だから，増減表は下の通り

x	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$	$\searrow$

(2) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

(3) $-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

4.4　平均値の定理の応用–関数の凸性

定義 4.2（**凸関数**）　区間 I で定義された関数 $f(x)$ が**下に凸**であるとは区間に含まれる任意の 3 点 a, c, b $(a<c<b)$ に対して

$$f(c) < \frac{b-c}{b-a}f(a) + \frac{c-a}{b-a}f(b) \tag{4.4}$$

が成り立つときにいう。(4.4) は区間 $[a,b]$ における $y=f(x)$ のグラフが 2 点 $(a,f(a))$ と $(b,f(b))$ を通る直線より下にあることを意味している。任意の 3 点 a, c, b $(a<c<b)$ に対して (4.4) における不等号が逆向きのとき，$f(x)$ が**上に凸**であるという。

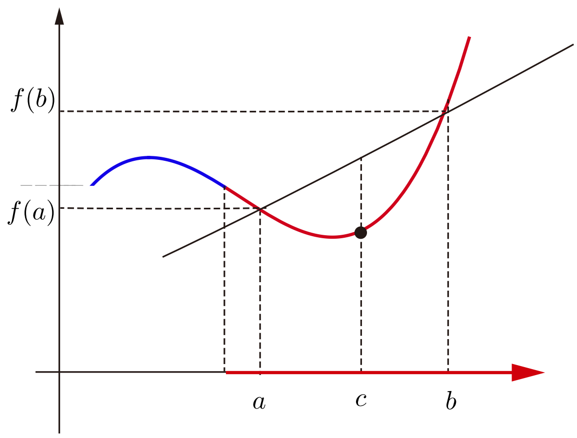

図 4.2　$f(x)$ は赤色の区間で下に凸

定理 4.5　$f(x)$ が 2 回連続微分可能で $f''(x)>0$ であるとき，関数 $f(x)$ が下に凸である。逆に $f''(x)<0$ であるとき，上に凸である。

証明. $f''(x)>0$ を仮定する。このとき, $f'(x)$ は単調増加である。

$$\begin{aligned}\left(\frac{b-c}{b-a}f(a)+\frac{c-a}{b-a}f(b)\right)-f(c)&=\frac{c-a}{b-a}(f(b)-f(c))-\frac{b-c}{b-a}(f(c)-f(a))\\&=\frac{(c-a)(b-c)}{b-a}\left(\frac{f(b)-f(c)}{b-c}-\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\right)\end{aligned}$$

平均値の定理により $p,\ q\ (a<p<c,\ c<q<b)$ が存在して

$$=\frac{(c-a)(b-c)}{b-a}\left(f'(q)-f'(p)\right)$$

$f'(x)$ は単調増加だから $f'(p)<f'(q)$. よって最後の項は正で

$$\left(\frac{b-c}{b-a}f(a)+\frac{c-a}{b-a}f(b)\right)-f(c)>0.$$

定理 4.6 **(極大・極小への応用)**　$f(x)$ が 2 回連続微分可能で $f''(x)$ は連続であるとする。

$f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ ならば $f(a)$ は極小値である。
$f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ ならば $f(a)$ は極大値である。

例題 4.2　関数

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$$

を考える。次の問いに答えよ。(もし極大値が 2 つ以上あるときはそれらをすべて答えよ。もし極大値が存在しないときは「極大値なし」と答える。極小値についても同様。)

(1)　$f(x)$ の凹凸も考慮した増減表を作成せよ。
(2)　$f(x)$ の極大値を求めよ。
(3)　$f(x)$ の極小値を求めよ。
(4)　$f(x)$ の変曲点をすべて求めよ。(変曲点は $(a,f(a))$ の形で答える。)

解答. (2), (3) については例題 1 で解答した。

$$f'(x)=-\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2},\quad f''(x)=-\frac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$$

である。

(1) 増減表は下の通り

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$2-\sqrt{3}$	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$	$2+\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤵	-1	↳	$-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$	⤴	$-\frac{1+\sqrt{3}}{4}$	↱	$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$	⤵	$\frac{\sqrt{3}-1}{4}$	↳

(2) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

(3) $-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

(4) $(-1,-1)$, $\left(2-\sqrt{3}, -\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(2+\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$.

Out[ ]=

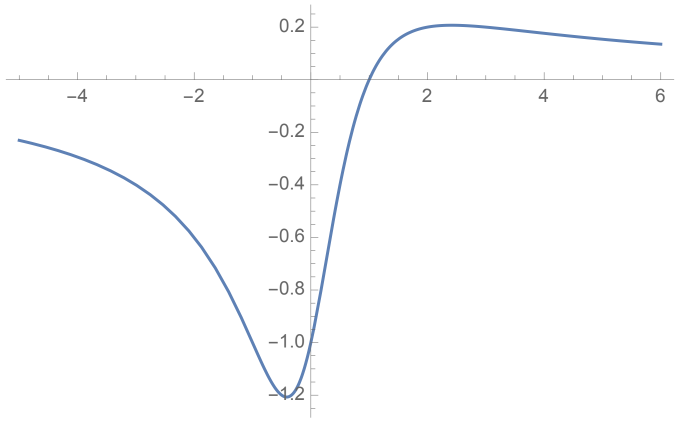

図 4.3　$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ のグラフ

4.5　問題 (微分法の応用)

増減表は第 3 回のファイルにある例題を参考に作成すること。

問題 10　関数

$$f(x)=\frac{x^2+5x+5}{x^2+x+1}$$

を考える。次の問いに答えよ。（もし極大値が 2 つ以上あるときはそれらをすべて答えよ。もし極大値が存在しないときは「極大値なし」と答える。極小値についても同様。）

(1)　$f(x)$ の増減表を作成せよ。

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

(2)　$f(x)$ の極大値を求めよ。

(3)　$f(x)$ の極小値を求めよ。

解答

(1) 増減表は下の通り

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-1/3$	$\nearrow$	5	$\searrow$

(2) 5

(3) $-1/3$

問題 11　関数

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$$

を考える。次の問いに答えよ。（もし極大値が 2 つ以上あるときはそれらをすべて答えよ。もし極大値が存在しないときは「極大値なし」と答える。極小値についても同様。）

(1)　$f(x)$ の凹凸も考慮した増減表を作成せよ。

x	
$f'(x)$	
$f''(x)$	
$f(x)$	

(2)　$f(x)$ の極大値を求めよ。

(3)　$f(x)$ の極小値を求めよ。

(4)　$f(x)$ の変曲点をすべて求めよ。（変曲点は $(a, f(a))$ の形で答える。）

解答

(1) 増減表は下の通り

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	⤴	$1+\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↱	$\frac{5}{2}$	⤵	1	↳	$-\frac{1}{2}$	⤴	$1-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↱

(2) 5/2

(3) $-1/2$

(4) $\left(-\sqrt{3}, 1+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(\sqrt{3}, 1-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0, 1)$.

図 4.4　おつかれ〜

5　初等関数の微分

5.1　三角関数の導関数

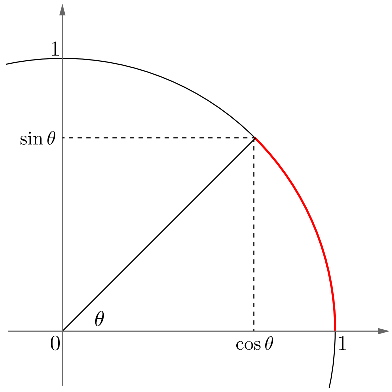

図 5.1

三角関数を始めて習うときは度数法を用いて $\sin 30°$, $\cos 45°$ などと表すのに，微分積分学では弧度法を用いる。弧度法は角の大きさを円弧の長さで表す。図は半径 1 の円で角 θ はそれをみこむ弧（赤色の部分）の長さで表す。度数法と弧度法の違いは「メートル」と「フット (フィート)」の違いのようなもので，その場で都合のよい方を用いればよいが，微分積分学では弧度法を使わないといけない。そうしないと次のような簡潔な三角関数の導関数の表現は得られない。

定理 5.1

$$(\sin\theta)' = \cos\theta \tag{5.1}$$
$$(\cos\theta)' = -\sin\theta \tag{5.2}$$
$$(\tan\theta)' = \frac{1}{\cos^2\theta} \tag{5.3}$$

慣習として $(\sin\theta)^n = \sin^n\theta$, $(\cos\theta)^n = \cos^n\theta$ などと記す。

三角関数の微分を直観的に理解しておこう。今，点 $r = r(\theta)$ は $(1, 0)$ を始点として xy-平面の原点中心，半径 1 の円周 C 上を反時計回りに速度 1 で回転しているとする。このとき時刻 θ での $r = r(\theta)$ の位置は $(\cos\theta, \sin\theta)$ である（θ をそうした特徴をもつ C のパラメータとして定義したのである。）この点における速度ベクトルは $r'(\theta)$ は $r(\theta)$ における C の接方向への長さ 1 のベクトルで，それは $\overrightarrow{Or}$ を原点の回りに $\pi/2$ だけ回転させた図の赤いベクトルに等しい。すなわち

$$r'(\theta) = ((\cos\theta)', (\sin\theta)') = (\cos(\theta + \pi/2), \sin(\theta + \pi/2))$$

だから

$$(\sin\theta)' = \sin(\theta + \pi/2) \qquad (\cos\theta)' = \cos(\theta + \pi/2) \tag{5.4}$$

これは $(\sin\theta)' = \cos\theta$, $(\cos\theta)' = -\sin\theta$ と同じであるが，(5.4) は $\sin\theta$, $\cos\theta$ の高次導関数を簡潔に導くという利点をもつ。

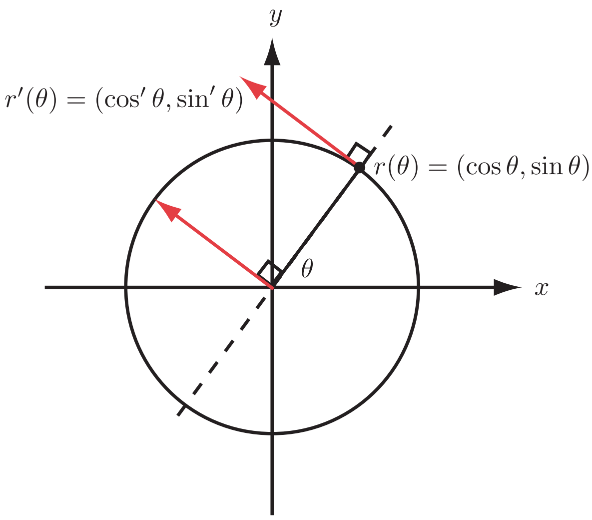

図 5.2　$\sin\theta$, $\cos\theta$ の導関数の物理的理解

$$(\sin\theta)^{(n)} = \sin(\theta + n\pi/2) \qquad (\cos\theta)^{(n)} = \cos(\theta + n\pi/2) \quad (n = 1, 2, ...)$$

厳密に (5.1),(5.2) を証明するには，三角関数の加法公式

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a, \quad \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \tag{5.5}$$

と (1.3)

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

を用いる。(5.5) のような式を「関数方程式」という。(1.3) より

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} h\left(-\frac{\sin^2 h}{h^2}\right)\frac{1}{\cos h + 1} = 0\times(-1)\times\frac{1}{2} = 0.$$

(5.1) と (5.2) は次のようにして従う。

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h - 1) + \sin h\cos x}{h} = \cos x,$$
$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin h\sin x}{h} = -\sin x.$$

例題 5.1　$\sin\frac{7\pi}{12}$, $\cos\frac{7\pi}{12}$ を求めよ。

解答.

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$$
$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

5.2　指数関数の導関数

$a > 0$ $(a \neq 1)$ とする。指数関数は次の関数方程式をみたす。

$$a^{x+y} = a^x a^y. \tag{5.6}$$

もし，指数関数 $f(x) = a^x$ が 微分可能であることを仮定すると

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\cdot a^x\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\cdot a^x\\ &= f'(0)a^x.\end{aligned}$$

つまり $f'(x)$ は $f(x)$ に**比例する**[*4]。もし，$f'(0) = 1$ となる定数 a があれば

$$f'(x) = f(x) \tag{5.7}$$

となって便利である。実際そのような数が存在する。その理由は省略が，そのような数は h が十分 0 に近いとき，$(a^h - 1)/h \approx 1$ だから $a \approx (1 + h)^{1/h}$. $x = 1/h$ とおけば，x が十分大きいとき $a \approx (1 + x^{-1})^x$ のはずである。

定義 5.1　$f(x) = a^x$ が $f'(0) = 1$ をみたすような定数 a を e と書いて，自然対数の底（あるいはネピア数）という。この e は

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 2.718281828459045\cdots \tag{5.8}$$

に等しい。e は無理数であることが知られている。

つまり

$$(e^x)' = e^x \tag{5.9}$$

であるが[*5]，一般の $a > 0$ $(a \neq 1)$ については $a = e^b$ とおくと $b = \log a$ (log は後ででてくる自然対数) なので，合成関数の微分法により

$$(a^x)' = (e^{(\log a)x})' = \log a \cdot e^{(\log a)x} = \log a \cdot a^x. \tag{5.10}$$

5.3　対数関数の導関数

$y = f(x) = e^x$ の逆関数 (**自然対数**) を $x = g(y) = \log_e y$ $(y > 0)$ とおく。ただし，通常 e を省いて $\log y$ と書く。対数の性質 $\log ab = \log a + \log b$ $(a, b > 0)$ より

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\log x + \log\left(1+\frac{h}{x}\right) - \log x}{h}\\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{1}{x}\log e \quad \left(k = \frac{x}{h}\right)\\ &= \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

[*4] また，このことより $f(x) = a^x$ は $x = 0$ で微分可能ならば，すべての x で微分可能であることがわかる。

[*5] この講義では極限 (5.8) の存在と $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ の証明は割愛する。

あるいは逆関数の微分を用いて (3.5) により

$$(\log y)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

独立変数を x で表して

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \qquad (x > 0) \tag{5.11}$$

一般の底 $a > 0$ $(a \neq 1)$ に対しては, $\log_a x = \log x / \log a$ を用いて

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a} \qquad (x > 0) \tag{5.12}$$

5.4　逆三角関数の導関数

$f(x) = \sin x$ の逆関数はいろいろな区間で定義できる。例えば $[-\pi/2, \pi/2]$, $[\pi/2, 3\pi/2]$, $[3\pi/2, 5\pi/2]$ などなどの区間で逆関数を定義することができるが，ここでは $[-\pi/2, \pi/2]$ での $f(x) = \sin x$ の逆関数に代表してもらって，これを $\sin^{-1} y$ とかく。(図 5.3 参照) しかし，この記号は $(\sin y)^{-1} = 1/\sin y$ と混同する恐れがあるので，$\arcsin y$(アークサイン）と書く方がよい。（後の $\cos x$ の逆関数も $\arccos y$ と書く方がよい。）ここでは泣く泣く $\sin^{-1} y$ と書くことにする (別に泣かいでもええけど)。逆関数の微分により

$$\begin{aligned}
(\sin^{-1} y)' &= \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \qquad (\because (-\pi/2, \pi/2) \text{ で } \cos x > 0 \text{ だから}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.
\end{aligned}$$

独立変数を x とすれば

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1) \tag{5.13}$$

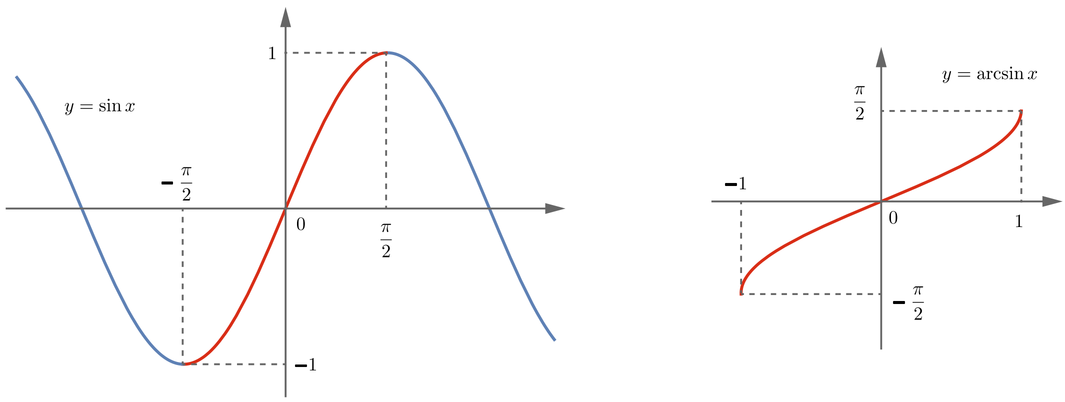

図 5.3　$\sin x$ と $\sin^{-1} x$ のグラフ

$f(x) = \cos x$ については $[0,\pi]$ での $f(x) = \cos x$ の逆関数に代表してもらって，これを $\cos^{-1} y$ と書く。(本当は $\arccos y$(アークコサイン) と書きたい。図 7.4 参照) 逆関数の微分により

$$\begin{aligned}(\cos^{-1} y)' &= \frac{1}{(\cos x)'} = \frac{1}{(-\sin x)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \quad (\because (0,\pi) \text{ で } \sin x > 0 \text{ だから}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.\end{aligned}$$

このことは $\sin^{-1} x + \cos^{-1} = \dfrac{\pi}{2}$ からも従う。独立変数を x とすれば

$$(\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1) \tag{5.14}$$

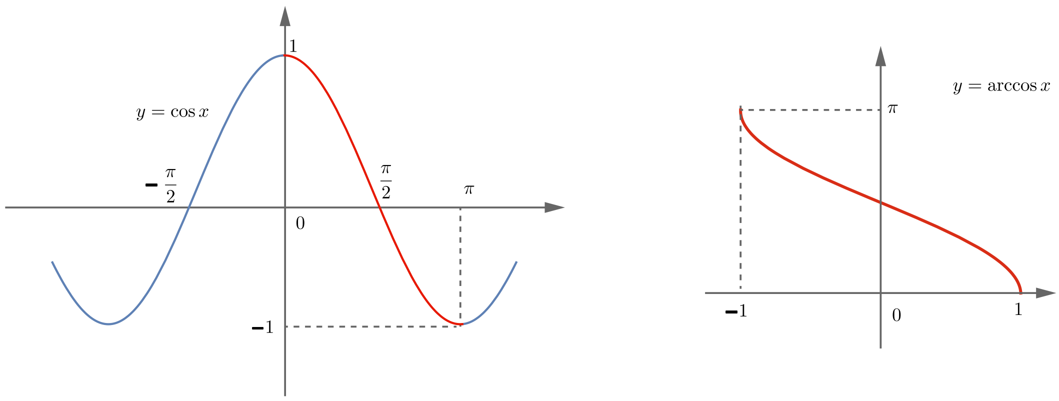

図 5.4　$\cos x$ と $\cos^{-1} x$ のグラフ

例題 5.2　次をみたす x を求めよ。

$$\cos^{-1} x = \tan^{-1} \sqrt{15}$$

$\theta = \cos^{-1} x = \tan^{-1} \sqrt{15}$ とおく。$x = \cos\theta$, $\sqrt{15} = \tan\theta$ である。$\cos^{-1} x$ と $\tan^{-1} x$ の値域より，

$$0 \le \theta \le \pi \text{ かつ } -\pi/2 < \theta < \pi/2 \ \Rightarrow 0 \le \theta < \pi/2.$$

$$\begin{aligned}x = \cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \qquad (\because 0 \le \theta < \pi/2 \text{ だから}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+15}} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

5.5　べき関数の導関数

実数 α に対して $f(x) = x^{\alpha}$ $(x > 0)$ の微分を考える。

$$f(x) = e^{\alpha \log x}$$

と書けるから（ただし，このように書く都合上，$x > 0$ を仮定した)，合成関数の微分により

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \log x})' = (\alpha \log x)' \cdot e^{\alpha \log x} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

よって

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{5.15}$$

これは α が有理数の場合 (3.7) と一致する。

5.6 問題 (初等関数の微分)

問題 12　$\sin \dfrac{\pi}{12}, \cos \dfrac{\pi}{12}$ を求めよ。

解答.

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$
$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

問題 13　$\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ を微分すると $\dfrac{a}{(\cos x + \sin x)^2}$ の形となる。この定数 a を求めよ。

解答. $a = -2$.

問題 14　関数 $f(x) = xe^{-x^2}$ の極大値を求めよ。

解答. $f'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$ だから $f(x)$ は $(-\infty, -1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, +\infty)$ で単調減少，$(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ で単調増加である。よって $f(x)$ は $x = 1/\sqrt{2}$ で極大値 $1/\sqrt{2e}$ をとる。

問題 15　次をみたす x を求めよ。

$$\sin^{-1} x = -\cos^{-1}\frac{5}{13}$$

解答. $\theta = \sin^{-1} x = -\cos^{-1}\dfrac{5}{13}$ とおく。$-\pi/2 < \sin^{-1} x < \pi/2$, $0 < \cos^{-1}\frac{5}{13} < \pi$ より，$-\pi/2 < \theta < 0$ に注意する。$x = \sin\theta$, $5/13 = \cos(-\theta) = \cos\theta$ が成り立つ。$-\pi/2 < \theta < 0$ だから，$\sin\theta < 0$. よって

$$x = \sin\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13}.$$

問題 16　逆関数の微分法を用いて $\tan x$ の逆関数 $\tan^{-1} x$ の導関数を求めよ。

解答. $(\tan^{-1} y)' \dfrac{1}{(\tan x)'} = \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x} = \dfrac{1}{1+y^2}$. 変数を x に変えて

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

問題 17　(いわゆる対数微分法) 微分可能な関数 $f(x)$ が $f(x) > 0$ をみたすならば

$$(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ より } f'(x) = f(x)(\log f(x))'$$

このことを用いて次の関数を微分せよ。

$$(1)\quad x^x \qquad (2)\quad x^{x^x} \qquad (3)\quad (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

解答.

(1) $x^x(1+\log x)$
(2) $\left(\frac{1}{x}+\log x+\log^2 x\right)x^x x^{x^x}$
(3) $\left(-\frac{1}{x^2}\log(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}\right)(1+x)^{\frac{1}{x}}$

図 5.5　おつかれ〜

6　高階導関数とテイラー展開

6.1　不定形の極限

a を含む区間で定義された関数 $f(x)$, $g(x)$ が $f(a) = g(a) = 0$ をみたすとき,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

を**不定形の極限**という。(場合によっては極限値が存在しないかも知れない)

定理 6.1　(ロピタルの定理) 下の右辺の極限が存在すれば

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{6.1}$$

これはコーシーの形の平均値の定理の応用である。ロピタルの定理は $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ の場合でも成り立つ。また a のところは $+\infty$ や $-\infty$ に置き換えてよい。さらには片側極限 $\lim_{x \to a+0} f(x)/g(x)$, $\lim_{x \to a-0} f(x)/g(x)$ に対しても成り立つ。

例題 6.1　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x}{x} \tag{6.2}$$

解答. $x = 0$ を代入すると $e^x - \cos x$ も x も 0 なので (6.2) は不定形の極限である。ロピタルの定理により

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - \cos x)'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + \sin x}{1} = 1.$$

例題 6.2　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) \tag{6.3}$$

解答.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \ (\text{不定形の極限}) \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x - x)'}{(x \sin x)'} \ (\text{ロピタルの定理より}) \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \ (\text{これも不定形の極限}) \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(\sin x + x \cos x)'} \ (\text{もう一度ロピタルの定理を使う}) \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} \\
&= \frac{0}{2} = 0
\end{aligned}$$

このように必要ならばロピタルの定理を繰り返し用いる。

6.1.1　循環論法について

例題 6.3　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

解答.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} \quad (\text{ロピタルの定理より}) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad (f(x) = e^x) \\
&= \frac{1}{2} f'(0) \quad (\text{ここではロピタルの定理を使わない!}) \\
&= \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

上の計算において $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ の計算箇所ではロピタルの定理を用いなかった。というのは $(e^x)' = e^x$ であることの証明に $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ であることを使ったからである。だからロピタルの定理を用いて

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

と答えてしまうと

$$\text{A を命題} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \text{B を命題} (e^x)' = e^x$$

とおくとき「A⇒B⇒A] という議論になってしまっている。言い換えると B を証明するのに「用いた命題」を用いてその「用いた命題」を示しているわけである。このような論法を**循環論法**という。例えば命題 A「ダ・ヴィンチのモナリザは名画である」と命題 B「名画とはダ・ヴィンチのモナリザのような絵のことをいう」の 2 つの命題は互いに参照し合っていて，名画とは何かを論じるときに 2 つの命題の間をグルグル回ることになる。議論がグルグル回る他の例として童謡の「ヤギさん郵便」がある。しろヤギさんから届いた手紙をくろヤギさんが食べ，くろヤギさんから届いた手紙をしろヤギさんが食べ続けるかぎり，用件がわかることは決してない。

フランス民謡の「アマリリス」–「フランスみやげ，やさしい　その音色よ，ラリラリラリラ，しらべは　アマリリス」–とフランスみやげのオルゴールが奏でる「アマリリス」の曲を聞いている情景を歌っているので，どうやら作詞者はこの曲に詞をのせる以前に「アマリリス」の歌を聴いたことがあるらしい。ではその「アマリリス」の曲はどこにあるのか。もし，その「アマリリス」に同じ歌詞がついていたとしたら，「アマリリス」の歌の中に「アマリリス」の歌があって，またその「アマリリス」の歌の中に「アマリリス」の歌があって，またその中に「アマリリス」の歌があって・・・「アマリリス」を聴くともあまりの恐ろしさに夜も眠れなくなる。

ロピタルの定理を応用するときは循環論法になっていないことに注意する必要がある。テストで自分では正解のつもりだったのが×になっていた理由の多くはこの点である。少なくとも微分の基本である

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

をロピタルの定理で導いてはいけない。例題 1 についても本当は

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)-(\cos x-1)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}\\ &= e^0-(-\sin 0) \quad (\text{微分の定義に戻る})\\ &= 1-0=1\end{aligned}$$

と答えるべきである。

6.2 高階導関数

関数の第 n 階導関数（あるいは第 n 次導関数) は帰納的に $f^{(1)}(x)=f'(x)$ と

$$f^{(n+1)}(x)=\{f^{(n)}(x)\}'$$

によって定める。ただし，微分の回数が少ないときは $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ のように書くことが多い。$n=0$ のときは $f^{(0)}(x)=f(x)$ と約束する。

6.2.1 基本的な高階導関数

n が自然数のとき

$$(x^n)^{(k)} = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} & (0\le k\le n)\\ 0 & (k>n)\end{cases} \tag{6.4}$$

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{(x+a)^{k+1}} \tag{6.5}$$

$$(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right) \tag{6.6}$$

$$(\cos x)^{(k)} = \cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right) \tag{6.7}$$

$$(e^x)^{(k)} = e^x \tag{6.8}$$

メモ 6.1　$\sin x$ の高階導関数は

$$(\sin x)^{(k)} = \begin{cases} \sin x & (k=4m \text{ のとき})\\ \cos x & (k=4m+1 \text{ のとき})\\ -\sin x & (k=4m+2 \text{ のとき})\\ -\cos x & (k=4m+3 \text{ のとき})\end{cases}$$

と書けるが，(6.6) の方が 1 行ですむので便利である。$\cos x$ についても同様。

問題 18　$f(x)=\log(x+a)$ $(x>-a)$ の第 n 階導関数を求めよ。

6.2.2　ライプニッツの定理

高階導関数に関しては次が大切。

定理 6.2（**ライプニッツの定理**）　$f(x)$, $g(x)$ は n 回微分可能とすると，積 $f(x)g(x)$ の第 n 階導関数は

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x). \tag{6.9}$$

ただし，${}_nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ は 2 項係数[*6]:

$$(x+y)^n = {}_nC_0 x^n + {}_nC_1 x^{n-1} y + {}_nC_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + {}_nC_{n-1} x y^{n-1} + {}_nC_n y^n$$

である。${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$ が成り立つので，上の式において $f(x)$ と $g(x)$ を交換してよい。2 項係数は例えば

$${}_nC_0 = 1,\ {}_nC_1 = n,\ {}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2\cdot 1},\ {}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1},\ {}_nC_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}.$$

定理の証明には数学的帰納法と 2 項係数の性質 ${}_{n+1}C_k = {}_nC_{k-1} + {}_nC_k$ を用いる。

例題 6.4　$f(x) = x^3 e^x$ の第 n 階導関数を求めよ。

解答. x^3 は 4 回以上微分すると 0 になることに注意するとライプニッツの定理により

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= {}_nC_0 x^3 (e^x)^{(n)} + {}_nC_1 (x^3)'(e^x)^{(n-1)} + {}_nC_2 (x^3)''(e^x)^{(n-2)} + {}_nC_3 (x^3)'''(e^x)^{(n-3)} \\ &= x^3 e^x + n(3x^2)e^x + \frac{n(n-1)}{2}(6x)e^x + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2} 6e^x \\ &= (x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2))e^x. \end{aligned}$$

例題 6.5　$f(x) = x^2 \cos x$ の第 4 階導関数を求めよ。

解答.

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= {}_4C_2 (x^2)''(\cos x)'' + {}_4C_1 (x^2)'(\cos x)''' + {}_4C_0 x^2 (\cos x)'''' \\ &= -12\cos x + 8\sin x + x^2 \cos x \\ &= (x^2 - 12)\cos x + 8 \sin x. \end{aligned}$$

例題 6.6　$f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$ の第 n 階導関数を求めよ。

解答. このまま商の微分を繰り返しても簡潔な答えは得られないので，この問題は工夫が必要である。部分分数分解すると

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{3}\frac{(x+1)-(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right)$$

[*6] 大学では $\binom{n}{k}$ と書くことが多い。

ここで (6.5) を用いると

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{3}\left\{\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}\right\} = \frac{(-1)^n n!}{3}\left\{\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right\}$$

6.3 テイラー展開

[概要] 私たちが最初に出会う関数は 1 次関数 $ax+b$ や 2 次関数 ax^2+bx+c でこれらは「多項式関数」で，より一般には次の形である。

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^n + \cdots + a_n x^n$$

多項式関数は和と積のみで定義されるので x に値を代入すれば関数の値が計算できる。一方 $\sin(0.1)$ の値や $e^{0.2}$ の値はすぐわからない。だからこうした関数を多項式関数で近似できれば便利である。それを可能ならしめるのがテイラーの定理である（ただし，例外があるのでいつでも正しいというわけではない。）我々は数を 10 進法で表す。たとえば，$\pi = 3.141592\cdots$ は

$$\pi = 3 + 1\left(\frac{1}{10}\right) + 4\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 1\left(\frac{1}{10}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{10}\right)^4 + 9\left(\frac{1}{10}\right)^5 + 2\left(\frac{1}{10}\right)^6 + \cdots$$

このことの類似でいうとマクローリンの定理は「関数を x 進法 (あるいは $x-a$ 進法) に展開する」のようなイメージを与える。

定理 6.3 (テイラーの定理) $f(x)$ は a を含む開区間 I で $n+1$ 回微分可能であるとすると

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1} \quad (6.10)$$

ここで，a と x の間にある c があって

$$R_{n+1} = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \quad (6.11)$$

とくに $a=0$ のときはマクローリンの定理という。

定理 6.4 (マクローリンの定理) $f(x)$ は 0 を含む開区間 I で $n+1$ 回微分可能であるとすると $x \in I$ に対して

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1} \quad (6.12)$$

ここで，0 と x の間にある c があって

$$R_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \quad (6.13)$$

例. いずれも c は 0 と x の間に存在する数

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}. \quad (6.14)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \frac{(-1)^{n+1}\sin c}{(2n+2)!}x^{2n+2}. \quad (6.15)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}\sin c}{(2n+1)!}x^{2n+1}. \quad (6.16)$$

例題 6.7　$\sin(0.1)$ の近似値を求めよ。

解答．(6.15) の $n=1$ の場合を考え，x に $0.1 = 1/10$ を代入すると

$$\begin{aligned}\sin(0.1) &= \frac{1}{10} - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + R_4 = \frac{1}{10} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + R_4 \\ &= \frac{599}{6000} + R_4 = 0.09983333\cdots + R_4\end{aligned}$$

$|\sin c| \leq 1$ だから

$$|R_4| = \left|\frac{(-1)^4 \sin c}{4!}\left(\frac{1}{10}\right)^4\right| \leq \frac{1}{240000} = 0.000041666\cdots$$

よって

$\sin(0.1)$ の近似値として $\dfrac{599}{6000} = 0.099833\dot{3}$ を選ぶと，誤差は 0.0000042 以下である。

ちなみに $\sin 0.1 = 0.099833416646828 15\cdots$.

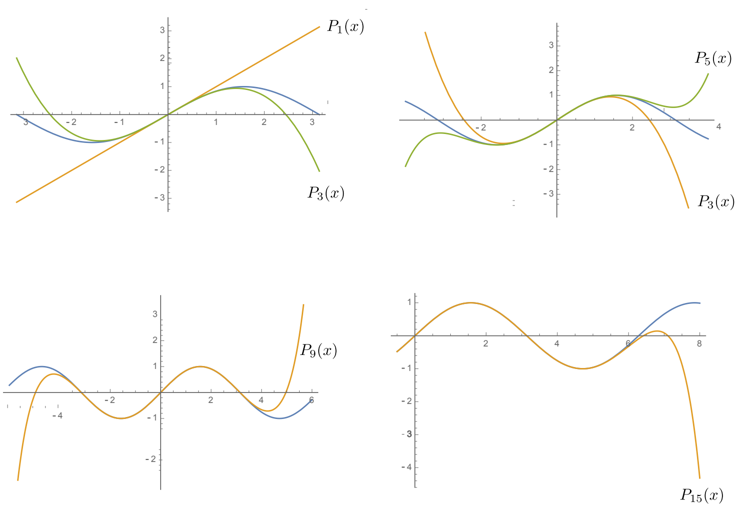

図 6.1　テイラーの定理を用いた $\sin x$ の多項式近似 (青が $\sin x$ のグラフ).

$$P_1(x) = x,\ P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!},\ P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},\quad \cdots$$

6.4　問題 (高階導関数とテイラー展開)

問題 19　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x}$$

解答.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x^2)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x^2}=0.$$

メモ 6.2

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x^2)}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x^2}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2x}=0.\end{aligned}$$

と答えた解答を見るが

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}=0$$

は容易なので，ここでロピタルの定理を用いるのは推奨できない（ただし，間違いではない。）また，∞ をまるで数のように扱って $\dfrac{1}{\infty}=0$ と書いた解答があるが，∞ という数は存在しないので正しくない。

問題 20　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to+0}x\log x$$

ヒント: $x\log x=\dfrac{\log x}{\frac{1}{x}}$ と変形してロピタルの定理を応用する。

解答.

$$\lim_{x\to+0}x\log x=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to+0}x=0.$$

問題 21　　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to+0}x^x$$

解答.

$$\lim_{x\to+0}x^x=\lim_{x\to+0}e^{x\log x}=e^0=1.$$

問題 22　$f(x)=x^3\cos x$ の第 4 階導関数が $P(x)\cos x+Q(x)\sin x$ と等しくなるように多項式 $P(x)$ と $Q(x)$ を求めよ。

解答. $g(x)=\cos x,\ h(x)=x^3$ とおくと

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x)x^x &= g^{(4)}(x)h(x)+4g'''(x)h'(x)+6g''(x)h''(x)+4g'(x)h'''(x)+g(x)h^{(4)}(x) \\ &= x^3\cos x+4(3x^2)\sin x+6(6x)(-\cos x)+4\cdot 6(-\sin x)+\cos x\cdot 0 \\ &= (x^3-36x)\cos x+(12x^2-24)\sin x \end{aligned}$$

よって

$$P(x)=x^3-36x, \quad Q(x)=12x^2-24$$

問題 23　$f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ の第 n 階導関数を求めよ。

解答.

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)$$

と部分分数展開すると

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$$

図 6.2　おつかれ〜

7　積分

7.1　積分の考え方

鳩サブレーを三等分するのはどうしたらよいか？

図 7.1

高性能なナイフがあれば，それで縦横同幅になるように鳩サブレーを切って，まず正方形のパートを 3 人に順番に分けていって，正方形のパートの残りが 2 以下になったら，正方形でないものも含めて余りのパートを順番に分ける。それでも不平等は生じるが，分割の目が細かければ余りの部分が生み出す不平等感は少ないだろう[*7]。縦横同幅に切ることは難しいので，鳩サブレーをぼろぼろに砕いて秤（はかり）で均等の重さに分けるという方法もある。噛んだときのポキッと折れる感覚を楽しむことはできないが。図形を「面積や体積のわかる図形の集まりにどこまでも 細かく分割する」というのが区分求積法の考え方の第一歩である。

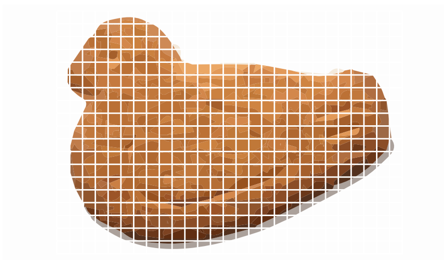

図 7.2

7.1.1　古代の求積法

放物線 $y = x^2$ と $P(a, a^2)$ と $Q(b, b^2)$ の 2 点を通る直線で囲まれた図形の面積 S をアルキメデスの方法にしたがって求めよう。まず，$R = \left(\dfrac{a+b}{2}, \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\right)$ とおいて三角形 PQR(赤の部分）の面積を求める。

$$\text{三角形 } PQR = \text{台形 } PABQ - \text{台形 } PACR - \text{台形 } RCBQ$$

ゆえ

$$\begin{aligned} S_0 = \text{三角形 } PQR \text{ の面積} &= \frac{1}{2}(a^2+b^2)(b-a) - \frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2} - a\right) \\ &\qquad -\frac{1}{2}\left(b^2 + \frac{a+b}{2}\right)\left(b - \frac{a+b}{2}\right) \\ &= \frac{1}{8}(b-a)^3. \end{aligned} \tag{7.1}$$

*7 細かいことを言えばサブレーの厚みも気にしないといけないが，ここでは無視する。

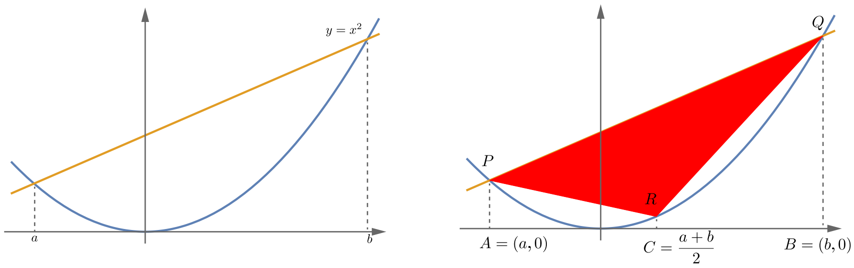

図 7.3

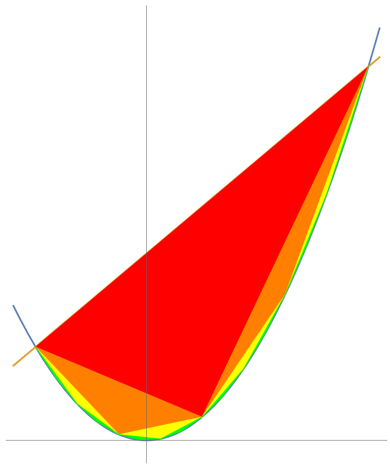

図 7.4　スイカじゃないよ。

次に $(a, 0)$ と $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$ とその中点 $\left(\frac{3a+b}{4}, 0\right)$ の 3 点，$(b, 0)$ と $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$ とその中点 $\left(\frac{a+3b}{4}, 0\right)$ の 3 点について同じように三角形（オレンジの部分）をつくりそれらの面積 S_{11}, S_{12} を計算する。(1) を当てはめて

$$S_{11} = \frac{1}{8}\left(\frac{a+b}{2} - a\right)^3, \ S_{12} = \frac{1}{8}\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^3.$$

だから

$$S_{11} = S_{12} = \frac{1}{8^2}(b-a)^3,$$

$$S_1 = S_{11} + S_{12} = \frac{1}{4 \cdot 8}(b-a)^3 = \frac{1}{4}S_0. \tag{7.2}$$

つまりオレンジの部分の面積は赤の部分の 4 分の 1 である。オレンジの三角形について同じことを繰り返すと，図の黄色の三角形の面積の和を S_2 としたとき

$$S_2 = \frac{1}{4}S_1 = \frac{1}{4^2}S_0.$$

以下，これの操作を繰り返すと第 n 段階で 2^n 個の三角形が生まれてそれらの面積の和を S_n とすると

$$S_n = \frac{1}{4^n}S_0$$

こうして得られた三角形は面積を求めたい図形を埋めつくすから，無限等比級数の和を用いて

$$\begin{aligned}S &= S_0 + \frac{S_0}{4} + \frac{S_0}{4^2} + \frac{S_0}{4^3} + + \frac{S_0}{4^4} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} S_0 \\ &= \frac{4}{3}\frac{(b-a)^3}{8} = \frac{1}{6}(b-a)^3\end{aligned}$$

7.2　区分求積法

連続関数 $f(x)$ のグラフと 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれる図形の面積 S を考える。ただし，$f(x) > 0$ としておく。区間 $[a, b]$ を n 等分すると，k 番目の区間は

$$I_k = \left[a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}, a + \frac{k(b-a)}{n} \right] \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

I_k を底辺にもつ高さ $f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$ の長方形 R_k(高さ $f\left(a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}\right)$ でもよい) の和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

とおく。$f(x)$ は連続，つまり，とても短い区間上では値の変化はすごく小さいので区間 I_k 上で $f(x)$ のグラフで囲まれた部分の面積は R_k の面積とほぼ等しい。だから S_n は n を限りなく大きくすると S に近づきそうである：

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}\right) \tag{7.3}$$

このようにして S を求める方法を**区分求積法**という。

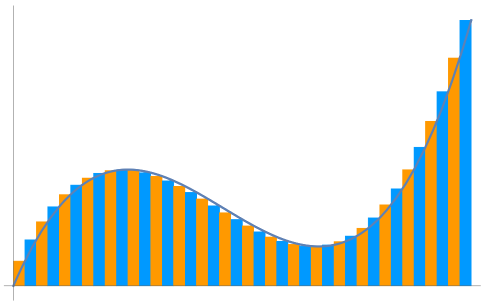

図 7.5　区分求積法

7.3　微分積分学の基本定理

区分求積法では n が大きくなればそれだけ多くの項の和を考えないといけないので，その方法で面積を具体的に求めることは困難である。アルキメデスの方法でも無限に和をとる必要があったが「等比級数という法則」が見つかったので面積を求めることができた。つまり「区分求積法」から「正しい面積の値」の間になんらかの**法則**がなければ計算のしようがない。放物線の場合はうまくいったが $y = x^n$ $(n > 2)$ などを考えると

うまくいかないので，そんな法則などありそうに思えない。ところがそんな法則があったである。見つけたのはニュートンやライプニッツといった人々である。

成功の鍵は $f(x)$ のグラフと区間 $[a,x]$ との間の図形の面積を x の関数として表したことである。この面積を $S(x)$ とおくと h が十分小さいときは $S(x+h)$ と $S(x)$ の差は底の長さ h で高さ $f(x)$ の長方形とほぼ等しいとみられるので

$$S'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} = f(x)$$

と考えられる。

$S(x)$ を

$$\int_a^x f(t)dt$$

と書く。(ただし，関数のグラフが x 軸より下にある区間では**負の面積**を考えないといけない。)

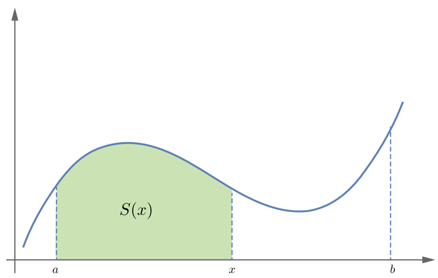

図 7.6　微分積分学の基本定理

定理 7.1　（微分積分学の基本定理) $f(x)$ を連続な関数とすると

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \tag{7.4}$$

求めたかった面積 S は $S(b)$，すなわち

$$\int_a^b f(x)dx$$

であり，これを $f(x)$ の a から b までの**定積分**という。微分積分学の基本定理は S を求めるには導関数が $f(x)$ になる関数 $F(x)$ を見つければよいと言っている。つまり

$$S = F(b) - F(a).$$

これを

$$\int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b \ \ (= F(b) - F(a))$$

と書く。$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分あるいは原始関数という。ただし，注意しなければならないのは 原始関数は一つに限らないことである。

> $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば，任意の定数 C に対して $F(x)+C$ も $f(x)$ の原始関数である。C を積分定数という，

基本的な不定積分の表を挙げておこう（積分定数は省略する)[*8]。

[*8] $1/x$ の原始関数を $\log|x|$ と覚えることには危険を伴う。詳しくは広義積分の章で習うが

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = [\log|x|]_{-1}^1 = \log 1 - \log 1 = 0$$

は誤りである。$1/x$ は $x=0$ で連続でないことに注意。

$f(x)=F'(x)$	$F(x)$
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$
$1/x$	$\log\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$a^x \ (a>0, a\neq 1)$	$a^x/\log a$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$1/\sqrt{1-x^2}$	$\sin^{-1} x$
$1/(1+x^2)$	$\tan^{-1} x$

メモ 7.1　区分求積法より

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n}\cdot f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n}\cdot f\left(a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}\right) \tag{7.5}$$

とくに $a=0,\, b=1$ のときは

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k-1}{n}\right) \tag{7.6}$$

例題 7.1　連続関数 $f(x)$ で次をみたすものを求めよ。

$$f(x) = x^2 + \int_{-1}^1 f(t)dt$$

解答. $a=\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)dt$ とおくと $f(x)=x^2+a$.

$$a = \int_{-1}^1 f(t)dt = \int_{-1}^1 (x^2+a)dt = \left[\frac{x^3}{3}+ax\right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}+2a$$

より，$a=-\dfrac{2}{3}$. $f(x)=x^2-\dfrac{2}{3}$.

例題 7.2　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{1}{4n^2-k^2}} \tag{7.7}$$

解答. (7.6) により

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{1}{4n^2-k^2}} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \left(f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ dx \\ &= \left[\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

例題 7.3　$G(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)dt$ のとき，$G'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ。（気になる人は $x > 2$ を仮定せよ）

解答. a を定数として (値は何でもよい) $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ とおくと $G(x) = F(x^2) - F(2x)$. 合成関数の微分と (7.4) より，

$$G'(x) = 2xF'(x^2) - 2F'(2x) = 2xf(x^2) - 2f(2x)$$

7.4　問題 (積分)

問題 24　次の不定積分と定積分を求めよ。(不定積分は積分定数 C を忘れないこと。)

(1) $\int \sqrt{x+a}\, dx$ (a は定数)

(2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$

解答. (1) $\frac{2}{3}(x+a)^{3/2} + C$
(2) (1) の結果を使う。

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \int_0^1 (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})dx = \frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1).$$

問題 25　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

解答.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\log(1+x)]_0^1 = \log 2.$$

問題 26　関数 $f(x)$ と $g(x)$ が

$$f(x) = (x^2 + 2)\sin x + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} g(t)dt$$
$$g(x) = (-2x + \pi)\sin x + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t)dt$$

をみたすとき，$f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。(次回扱う部分積分を使う。)

解答. 部分積分を繰り返して

$$\int x\sin x\ dx = -x\cos x + \sin x + C, \quad \int x^2 \sin x\ dx = -(x^2-2)\cos x + 2x\sin x$$

がわかる。これらを用いて

$$a = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} g(t)dt,\ b = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt.$$

とおく。

$$a = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{(-2x+\pi)\sin x + b\}\,dx = \frac{b}{2}, \quad b = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{(x^2+2)\sin x + a\right\}dx = \frac{\pi+a}{2}.$$

$$a = \frac{\pi}{3},\ b = \frac{2\pi}{3}.$$

図 7.7　おつかれ〜

8　積分法の基本公式

8.1　基本不等式の証明–円の周長と面積

円の直径と周の長さの比は円の大きさに依らずに一定であることは古代から知られていた。直径 1 の円の周の長さを π（円周率）を呼ぶ。その値はおよそ 3 である。[*9] 実際の値は 3.14159265 $\cdots$. 半径 1（したがって直径 2) の円周の長さは 2π である。

　　　　半径 1 の円の面積は π である。

このことを感覚的に理解しよう。円板を図のように $2n$ 個の扇型に等分割する（上は 24 分割，下は 48 分割)。扇形を n 個ずつの 2 組に分けて (赤の扇形と黄色の扇形)，それらを組み替えて図の右側の図形をつくる。

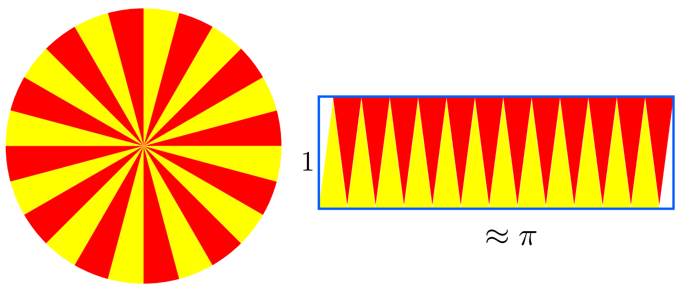

図 8.1　24 分割

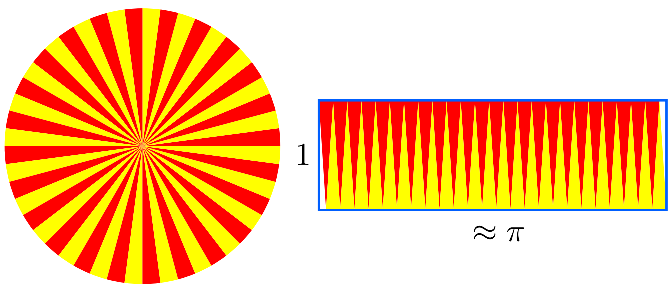

図 8.2　48 分割

この図形の上と下の辺 (と呼んでいいのか？) の長さは円周の長さの半分，つまり π である。図形の高さは円の半径 1 である。図形の面積は扇形の組み合わせを替えただけだから円板の面積と変わらない。n を大きくしていくと究極的にはこの図形は底辺 π, 高さ 1 の長方形になるだろう。ということで

[*9] 立川談吉 「およそ 3」という落語を聴いた (http://shiburaku.seesaa.net)—2020 年度小学校学習指導要領の改訂にともなって「円周率をおよそ 3 と教えることになった」という話が世間に広まり一騒動を起こしたことをネタにしたもの。このことはいまでもゆとり教育の象徴のように扱われている。

$$半径 1 の円の面積 = 1 \times \pi = \pi.$$

半径 1 の円板に含まれる中心角 θ の扇形 S を考えよう。弧度法（ラジアン）では長さ θ の円弧がみこむ中心角の大きさを同じ θ で表す。日常生活では角の大きさは $30°$, $45°$ など度数法で表すことが多いが，微分積分学では弧度法を使わないととても面倒くさいことになるのであった。半径 1 の円板の中で扇形 S がを占める

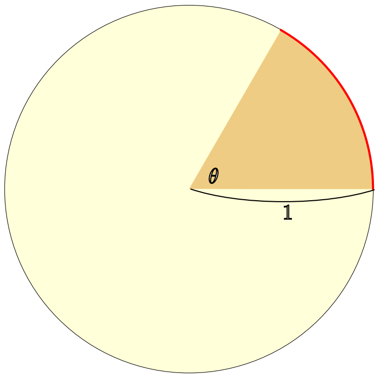

図 8.3　弧度法では θ は赤の弧の長さ

割合は $\theta/(2\pi)$ だから

$$S の面積 = \frac{\theta}{2\pi} \times 半径 1 の円板の面積 = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi = \frac{\theta}{2} \tag{8.1}$$

8.1.1　基本不等式の証明

次の図 8.4 を見てください。三角形 OQR は扇形 OQR に含まれ，扇形 OQR は三角形 OQS に含まれるから

$$\triangle OQR の面積 < 扇形 OQR の面積 < \triangle OQS の面積$$

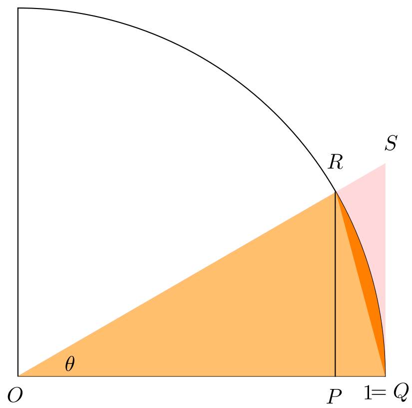

図 8.4　$PR = \sin\theta$, $QS = \tan\theta$

$$\frac{1}{2}\times 1\times\sin\theta < \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2}\times 1\times\tan\theta$$

すなわち，基本不等式

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta \tag{8.2}$$

を得る。これを書き換えると

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \tag{8.3}$$

だから

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \tag{8.4}$$

三角関数の微分 $(\sin\theta)' = \cos\theta$, $(\cos\theta)' = -\sin\theta$ はすべてここから始まったのであった[*10]。

8.2 置換積分法

微分積分学の基本定理により，微分と積分が互いの逆演算だと考えると[*11]

合成関数の微分法 $\Longrightarrow$ 置換積分法

関数の積の微分法 $\Longrightarrow$ 部分積分法

である。先に進む前に積分の記法について一つ約束をしておく。$a < b$ のとき

$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx$$

定理 8.1 (置換積分)
(1)(不定積分) $t = \varphi(x)$ が微分可能ならば

$$\int f(t)\ dt = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\ dx \tag{8.5}$$

(2)(定積分) さらに，$c = \varphi(a)$, $d = \varphi(b)$ ならば

$$\int_c^d f(t)\ dt = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\ dx \tag{8.6}$$

メモ 8.1 別に x が a から b まで動くとき，$\varphi(x)$ が単調増加（あるいは単調減少）で c から d まで動くことを仮定する必要はない。このことは「ベクトル解析」で線積分を習うとわかる。ここでは深く立ち入らない。

例題 8.1 次の積分を計算せよ。

$$\int \frac{x}{1+x^2}\ dx$$

[*10] だから，前にも言ったようにロピタルの定理の応用には気をつけないといけない。極限値を求める問題で答が正しいのに不正解になる理由のほとんどがロピタルの定理を不当に使って循環論法になっていることである。

[*11] 厳密に言うと，正しくない。実際は微分して積分すると積分定数の差だけ違う。「僕は数学が好きなので数学的に考えてみたら、ある数式を微分して積分すると元の数式には戻らなくて、一部がそぎ落とされた数式になるんです。それと同じことで、古典を現代に置き換えると、登場人物の感情の動き方が現代的になる。それを再び古典化するとパッケージは古典だけど、流れてる感情が現代的になる。(中略) 現代に合う古典のやり方ってこういうことなのかなと思います」（立川吉笑「落語家は社会のカウンター　立川吉笑が語る伝統と現代性」(Asahi Digital & M, 2020 年 3 月 27 日) より）

解答. $f(t)=1/t$, $t=\varphi(x)=1+x^2$ とおく。$\varphi'(x)=2x$ だから

$$\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\int\frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx=\int\frac{x}{1+x^2}\ dx$$

左辺を計算して

$$\int\frac{x}{1+x^2}\ dx=\frac{1}{2}\log t+C.$$

レポートを見ると，ときどきここで終わっている解答がある。問題は x の関数についての積分だから，答は x の解答で返さないといけない。 したがって答は

$$\frac{1}{2}\log(1+x^2)+C \quad C \text{ は積分定数}$$

$1+x^2>0$ は明らかだから，$\frac{1}{2}\log|1+x^2|+C$ と答えると答は正しくても，よい印象を与えない。次は公式として覚えておいた方がよいかもしれない。

例 3　$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると

$$\int f(\cos\theta)\sin\theta\ d\theta=-F(\cos\theta),\qquad \int f(\sin\theta)\cos\theta\ d\theta=F(\sin\theta) \tag{8.7}$$

例題 8.2　次の積分を計算せよ。

$$\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\ d\theta$$

解答. $\left(x-\dfrac{x^3}{3}\right)'=1-x^2$ だから，上の式を使って

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\ d\theta&=\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\ d\theta\\&=\left[\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

8.3　部分積分法

定理 8.2　(部分積分)
(1)(不定積分) $g(x)$ が微分可能で $F'(x)=f(x)$ ならば

$$\int f(x)g(x)\ dx=F(x)g(x)-\int F(x)g'(x)\ dx \tag{8.8}$$

(2)(定積分)

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx=[F(x)g(x)]_a^b-\int_a^b F(x)g'(x)\ dx \tag{8.9}$$

ただし，

$$[F(x)g(x)]_a^b=F(b)g(b)-F(a)g(a).$$

例題 8.3　次の定積分を計算せよ。

$$\int_a^b (x-a)(b-x)^3\ dx$$

解答. 部分積分法を応用するとき，問題になるのはどちらを $f(x)$ に，どちらを $g(x)$ に選ぶかである。この問題では $f(x)=(b-x)^3$, $g(x)=x-a$ とするべきである。このとき

$$F(x)=-\frac{1}{4}(b-x)^4,\quad g'(x)=1$$

だから

$$\begin{aligned}\int_a^b (x-a)(b-x)^3\ dx &= \left[-\frac{1}{4}(b-x)^4\cdot(x-a)\right]_a^b-\int_a^b\left(-\frac{1}{4}(b-x)^4\right)\times 1\ dx\\ &= 0+\left[-\frac{1}{4\cdot 5}(b-x)^5\right]_a^b=\frac{(b-a)^5}{20}.\end{aligned}$$

選び方を逆にすると部分積分を何度も繰り返すはめになる。どちらを $f(x)$ に，どちらを $g(x)$ に選ぶかは**職人芸**の領域なので，問題を多く解いて感覚を磨くしかない。

例題 8.4　次の定積分を計算せよ[*12]。ただし $\tan^{-1}x$ は $\tan x$ の逆関数

$$\int_0^1 \tan^{-1}x\ dx$$

解答. $\tan^{-1}x$ を $1\times\tan^{-1}x$ と見て，さらに $1=x'$ とおく。つまり $f(x)=1$, $g(x)=\tan^{-1}x$ とおいて

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tan^{-1}x\ dx &= \int_0^1 (x')\tan^{-1}x\ dx=\left[x\tan^{-1}x\right]_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx\\ &= \frac{\pi}{4}-\left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^1 \quad (\text{例題??より})\\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{\log 2}{2}.\end{aligned}$$

この問題では「見えない 1」が重要な役割を果たしたが，こんなのは気づくわけがない。初めに気づいた人がとても偉かったと言うしかない。

もう一つ同じような例題を挙げる。

例題 8.5　次の不定積分 $\displaystyle\int \log x\ dx$ を計算せよ。

解答. $\log x$ を $1\times\log x$ と見て，さらに $1=x'$ とおく。つまり $f(x)=1$, $g(x)=\log x$ とおいて

$$\int \log x\ dx=\int (x')\log x\ dx=x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\log x-x+C$$

8.4　問題 (積分の基本的公式)

[*12] この問題は過去に類題を習った経験がないと決して解けない問題。

問題 27　次の不定積分を求めよ。(積分定数 C を忘れないこと。)

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\ dx$ (置換積分の問題)

(2) $\displaystyle\int \sin^3\theta\ d\theta$ (例題 8.2)

(3) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^2}\ dx$ (例題 8.1+ ひと工夫)

(4) $\displaystyle\int x^2\log x\ dx$ (例題 8.5)

(5) $\displaystyle\int \sin^{-1}x\ dx$ ($\sin^{-1}x$ は $\sin x$ の逆関数) (例題 8.4)

解答. (1)–(3) は置換積分，(4)–(5) は部分積分の問題

(1) $\dfrac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}+C$

(2) $-\cos\theta+\dfrac{\cos^3\theta}{3}+C$

置換積分の問題だったのでこの解答が好ましいのだが

$$-\frac{3}{4}\cos\theta+\frac{1}{12}\cos 3\theta+C$$

でも正解。

(3) $\dfrac{1}{2}(x^2-\log(x^2+1))+C$

$$\frac{x^3}{1+x^2}=x-\frac{x}{1+x^2}=x-\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}$$

と変形する。$\dfrac{x^2+1-\log(x^2+1)}{2}+C$ という解答も多かった。1/2 を積分定数に移せば上と同じ答えであることに注意。

(4) $\dfrac{x^3\log x}{3}-\dfrac{x^3}{9}+C$

$$\int x^2\log x\ dx=\frac{x^3}{3}\log x-\frac{1}{3}\int x^2\ dx=\frac{x^3\log x}{3}-\frac{x^3}{9}+C$$

(5) $x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+C$

$$\begin{aligned}\int \sin^{-1}x\ dx &= x\sin^{-1}x-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \\ &= x\sin^{-1}x+\frac{1}{2}\int \frac{(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \\ &= x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+C\end{aligned}$$

図 8.5　おつかれ〜

9　積分の計算技法–有理関数の積分

9.1　部分分数分解

　有理関数とは多項式の比で表される関数

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

のことである。必要ならば a_n, a_{n-1},..., a_0 を a_n/b_m, a_{n-1}/b_m,..., a_0/b_m で置き換えて $b_m = 1$ としてよい。部分分数分解すると $f(x)$ は次の 3 つのタイプの項の和に書ける[*13]。

- (タイプ 1) 多項式
- (タイプ 2) $\dfrac{b}{(x-a)^r}$ $(r = 1, 2, 3, ...)$
- (タイプ 3) $\dfrac{px+q}{(x^2+bx+c)^r}$ $(r = 1, 2, 3, ..., b^2 - 4c < 0$← 分母の判別式 $< 0)$

例題 9.1

$$f(x) = \frac{x^5 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + 1}$$

を部分分数分解せよ。

解答. 分子を分母で割り算すると，$x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2+1)(x^3+1) + x$.

$$\frac{x^5 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + 1} = x^2 + 1 + \frac{x}{x^3+1}$$

次に $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ で $x^2 - x + 1$ の判別式 $-3 < 0$ だから，$x^2 - x + 1 = 0$ は実数解をもたない。よって，実数の範囲ではこれ以上因数分解できない。次の形に分解したい。

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

すなわち

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^3+1} &= \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} = \frac{a(x^2-x+1) + (bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (-a+b+c)x + (a+c)}{x^3+1}\end{aligned}$$

係数を比較して

$$a + b = 0,\ -a + b + c = 1,\ a + c = 0$$

この連立方程式を解いて

$$a = -\frac{1}{3}, b = c = \frac{1}{3}$$

[*13] 必ず部分分数分解できることが理論上わかっている。しかし 5 次以上の方程式には「解の公式」が存在しないので部分分数分解を具体的に（代数的な方法だけで）求めることは一般的には不可能である

したがって，求めたかった部分分数分解は

$$f(x) = x^2 + 1 - \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\frac{x+1}{x^2-x+1}$$

9.2 有理関数の積分

さてタイプ 1 の多項式の不定積分は容易に計算できる。またタイプ 2 の不定積分

$$\int \frac{b}{(x-a)^r}dx = \begin{cases} -\dfrac{b}{r-1}\dfrac{1}{(x-a)^{r-1}} & (r \geq 2) \\ b\log|x-a| & (r=1) \end{cases} \tag{9.1}$$

もよい。問題はタイプ 3

$$\int \frac{px+q}{(x^2+bx+c)^r}dx \tag{9.2}$$

である。$p \neq 0$ ならば

$$\frac{px+q}{(x^2+bx+c)^r} = \frac{p}{2}\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^r} + \frac{A}{(x^2+bx+c)^r}, \quad \text{ここで } A = -\frac{pb}{2} + q$$

$2x + b = (x^2 + bx + c)'$ だから

$$\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^r}dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{r-1}\dfrac{1}{(x^2+bx+c)^{r-1}} & (r \geq 2) \\ \log(x^2+bx+c) & (r=1) \end{cases} \tag{9.3}$$

したがって最後に残ったのは

$$\int \frac{h}{(x^2+bx+c)^r}dx \tag{9.4}$$

の形の積分 ($h = q$ または $h = A$)

$$s = \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}, \quad y = \frac{1}{s}\left(x - \frac{b}{2}\right), \quad \frac{dx}{dy} = s$$

とおくと

$$\begin{aligned} \int \frac{h}{(x^2+bx+c)^r}dx \quad &= \int \frac{h}{\left(x^2+bx+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}+c\right)^r}dx \\ &= \int \frac{h}{\left(\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4c-b^2}{4}\right)^r}dx = \int \frac{h}{\left(\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+s^2\right)^r}dx \\ &= \int \frac{h}{s^{2r}\left(\frac{1}{s^2}\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+1\right)^r}dx \\ &= \frac{h}{s^{2r-1}}\int \frac{1}{(y^2+1)^r}\ dy. \end{aligned}$$

よって次の積分に帰着できる。

例 4

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

を計算する。部分積分法により

$$\begin{aligned} I_n &= \int 1 \cdot (1+x^2)^{-n}\, dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} - \int x(-2nx(1+x^2)^{-n-1})\, dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^{n+1}}\, dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(I_n - I_{n+1}). \end{aligned}$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$$

$I_1 = \tan^{-1} x + C$ と上の漸化式から n を与えれば I_n を求めることができる。ちょっとだけやってみると

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+x^2} &= \tan^{-1} x + C, \\ \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} &= \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + C, \\ \int \frac{dx}{(1+x^2)^3} &= \frac{1}{4} \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{8} \frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{8} \tan^{-1} x + C, \\ \int \frac{dx}{(1+x^2)^4} &= \frac{1}{6} \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{5}{24} \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{5}{16} \frac{x}{1+x^2} + \frac{5}{16} \tan^{-1} x + C, \\ &\vdots \end{aligned}$$

例題 9.2　次の不定積分を計算せよ。

$$I = \int \frac{x^5 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + 1}\, dx$$

解答. 例題 8.1 の部分分数分解により

$$\begin{aligned} I &= \int (x^2+1) dx - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3} \int \frac{x+1}{x^2 - x + 1}\, dx \\ &= \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{3} \log|x+1| + \frac{1}{3} \int \frac{x+1}{x^2 - x + 1}\, dx. \end{aligned}$$

最後の積分の計算

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2-x+1}\, dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1) + \frac{3}{2}}{x^2-x+1}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}\, dx + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2-x+1} \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2-x+1) + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2-x+1}. \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2-x+1} &= \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&= \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{4}(t^2+1)}dt \qquad \left(x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}t+C \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+C
\end{aligned}$$

以上をまとめて

$$\int \frac{x^5+x^3+x^2+x+1}{x^3+1}\,dx = \frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{6}\log\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

9.3 有理関数の積分に帰着できる例

積分

(1) $\displaystyle\int P(x)\sqrt{x+a}\,dx,$

(2) $\displaystyle\int \frac{P(x)}{\sqrt{x+a}}\,dx, \qquad P(x)$ は有理関数

は $t=\sqrt{x+a}$ とおくと有理関数の積分に帰着できる。このとき，$x=t^2-a$ で，置換積分を行うと

(1) $\displaystyle\int P(x)\sqrt{x+a}\,dx = \int 2P(t^2-a)t^2\,dt,$

(2) $\displaystyle\int \frac{P(x)}{\sqrt{x+a}}\,dx = \int 2P(t^2-a)\,dt.$

例題 9.3 次の積分を計算せよ。

$$\int_0^1 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{1+x}}$$

解答. $t=\sqrt{1+x}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{1+x}} &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2}{4-t^2}dt = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+2}+\frac{1}{2-t}\right)dt \\
&= \left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{2+t}{2-t}\right)\right]_1^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2}\log 3 \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{(2+\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}\right)-\frac{1}{2}\log 3 \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{3}\right)
\end{aligned}$$

例題 9.4　次の不定積分を計算せよ。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}} \quad (a \neq b)$$

解答. 見かけよりは恐ろしくない。置換積分も必要ない。第 6 回の練習問題にも類題を提出した。

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}} &= \int \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b})}dx \\ &= \frac{1}{a-b}\int \left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}\right)dx \\ &= \frac{2}{3(a-b)}\left((x+a)^{\frac{3}{2}}-(x+b)^{\frac{3}{2}}\right)+C\end{aligned}$$

では

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}+\sqrt{x+c}} \quad (a \neq b, b \neq c, c \neq a)$$

はどうだろうか？　答をいうと現在知っている関数（高校までに習う関数と逆三角関数）を用いて表すことはできない。

9.4　問題 (有理関数の積分)

問題 28　次の不定積分を求めよ。(積分定数 C を忘れないこと。)

$$\int \frac{dx}{4-x^2}$$

解答. (2 点)

$$\int \frac{dx}{4-x^2} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}\right)dx = \frac{1}{4}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+C$$

問題 29　次の問いに答えよ。

(1)　次の部分分数分解が成り立つように定数 a, b, c, d を求めよ。

$$\frac{x^3+2x^2-6}{x^2+x-2} = ax+b+\frac{c}{x+2}+\frac{d}{x-1}$$

(2)　次の不定積分を求めよ。(積分定数 C を忘れないこと。)

$$\int \frac{x^3+2x^2-6}{x^2+x-2}\,dx$$

解答. (1) (2 点)

$$a=1, b=1, c=2, d=-1$$

(2) (2 点)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2x^2-6}{x^2+x-2}\,dx &= \int \left(x+1+\frac{x-4}{(x+2)(x-1)}\right)dx \\ &= \int \left(x+1+\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-1}\right)dx \\ &= \frac{x^2}{2}+x+\log\frac{(x+2)^2}{|x-1|}+C\end{aligned}$$

問題 30　次の不定積分が成り立つような x の多項式 $P(x)$ を求めよ。(因数分解できれば，$P(x)$ は因数分解した形で答えよ。)

$$\int 15(x+1)\sqrt{x-1}\ dx = P(x)(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

解答. (2 点) $t=\sqrt{x-1}$ とおくと

$$\begin{aligned}\int 15(x+1)\sqrt{x-1}\ dx &= \int 15((t^2+2)t)2dt = \int 15(2t^4+4t^2)dt \\ &= 15\left(\frac{2}{5}t^5+\frac{4}{3}t^3\right)+C \\ &= 15\cdot\frac{2(3x+7)(x-1)\sqrt{x-1}}{15}+C\end{aligned}$$

よって

$$P(x)=2(3x+7)$$

問題 31　次の不定積分を求めよ。(積分定数 C を忘れないこと。)

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}\ dx$$

解答. (2 点) $t=\sqrt{x-1}$ とおくと

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}\ dx &= \int (t^2+2))2dt = \int (2t^2+4)dt \\ &= \frac{2}{3}t^3+4t++C \\ &= \left(\frac{2}{3}(x-1)+4\right)\sqrt{x-1}+C \\ &= \frac{2(x+5)\sqrt{x-1}}{3}+C.\end{aligned}$$

図 9.1　おつかれ〜

10　積分の計算技法–三角関数と無理関数の積分

10.1　三角関数の積分

例題 10.1

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \; dx \qquad (n = 0, 1, 2, ...) \tag{10.1}$$

を求める。2 つの積分の値が等しいのは区間 $[0, \pi/2]$ における $\sin x$ のグラフと $\cos x$ のグラフをみればわかるだろう。

解答. $n \geq 2$ のとき，部分積分を用いて

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \; dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n-1} x \; dx \\ &= \quad \left[(-\cos x) \sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (\sin^{n-2} x \cos x) \; dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x \; dx \\ &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n. \end{aligned}$$

移行して整理すると

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \tag{10.2}$$

ここで

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \; dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \; dx = 1$$

よって n が奇数と偶数とで答えの書き方が違ってくる。

$$I_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3 \cdot 1}{(2m)(2m-2)\cdots 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2} \tag{10.3}$$

$$I_{2m-1} = \frac{(2m-2)(2m-4)\cdots 4 \cdot 2}{(2m-1)(2m-3)\cdots 3 \cdot 1} = \frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!} \tag{10.4}$$

これらの式は本当によく使うので，覚えておこう。ただし，

$$\begin{aligned} &k \text{ が偶数のとき} \quad k!! = k(k-2)(k-4)\cdots 4 \cdot 2, \\ &k \text{ が奇数のとき} \quad k!! = k(k-2)(k-4)\cdots 3 \cdot 1. \end{aligned}$$

例えば

$$I_8 = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{35}{256} \pi.$$

例題 10.2

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \tag{10.5}$$

を求める。

解答. I において $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ とおくと

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$$

だから

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt = J. \tag{10.6}$$

よって

$$2I = J + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

したがって[*14]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{4}. \tag{10.7}$$

10.2 無理関数の微分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C.$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right) + C.$$

まず次の積分を考える。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \tag{10.8}$$

鍵となるのは双曲線関数である。

$$\begin{aligned} \sin^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &\xrightarrow{\text{逆関数}} \sin x \ (\text{三角関数}) \\ \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} &\xrightarrow{\text{逆関数}} \sinh x \ (\text{双曲線関数}) \end{aligned} \tag{10.9}$$

定義 10.1　双曲線関数を

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{10.10}$$

によって定義する。それぞれハイパボリック・サイン，ハイパボリック・コサインと呼ぶ。定義から

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{10.11}$$

$$(\cosh x)' = \sinh x, \quad (\sinh x)' = \cosh x \tag{10.12}$$

がわかる。

[*14] こんな計算は狙ってできるものではない。長い歴史の中でたまたま発見されたといってよいのではないか。補足で別証明を与える。

$t=\sinh x$ とおくと (10.11) と $\cosh x \geq 1$ により，$\cosh x=\sqrt{1+t^2}$.

$$t+\sqrt{1+t^2}=\sinh x+\cosh x=e^x \;\Rightarrow\; x=\log(t+\sqrt{1+t^2})$$

これらから積分 (10.8) を計算しよう。$t=\sinh x$ とおくと

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\int \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}}(\sinh x)'\,dx=\int dx=x+C=\log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)+C.$$

よって $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ とおくと

$$F(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\Big[\log(t+\sqrt{1+t^2})\Big]_0^x=\log(x+\sqrt{1+x^2}).$$

まとめると

定理 10.1　$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ の不定積分は

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C. \tag{10.13}$$

例題 10.3　次の不定積分を求めよ。

$$I=\int \sqrt{1+x^2}\,dx$$

解答. 部分積分法を用いる。

$$\begin{aligned}I&=x\sqrt{1+x^2}-\int x\left(\frac{1}{2}(2x)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx\\&=x\sqrt{1+x^2}-\int \frac{(1+x^2)-1}{\sqrt{1+x^2}}dx\\&=x\sqrt{1+x^2}-I+\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\end{aligned}$$

(10.13) より

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)+C \tag{10.14}$$

10.3　オイラーの公式

もう一度 (10.9) 式を見てみよう。(計算の都合上，文字はいろいろ変えてある。)

$$\theta=\sin^{-1}x=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad \xrightarrow{\text{逆関数}} \quad x=\sin\theta \ (\text{三角関数})$$

$$y=\log(x+\sqrt{1+x^2})=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \quad \xrightarrow{\text{逆関数}} \quad x=\sinh y=\frac{e^y-e^{-y}}{2} \ (\text{双曲線関数})$$

虚数単位 i ($i^2=-1$) をあたかも実定数のように扱って，下の式の左の積分において x を ix に置き換え，さらに $t=is$ とおくと

$$y=\int_0^{ix} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\int_0^x \frac{ids}{\sqrt{1-s^2}}=i\theta.$$

これを下の式の右側に代入すると

$$ix = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}.$$

$\theta = \sin^{-1} x$, すなわち $x = \sin\theta$ だから,

$$x = \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}}{4}}$$
$$= \pm\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$$

$\cos 0 = 1$ だから復号は $+$ の方を選ぶ。

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

これらからオイラーの公式を得る[*15]。

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta} \tag{10.15}$$

10.4 補足–三角関数の積分

三角関数の積分を有理関数の積分に換える法

XY 平面に原点中心，半径 1 の円 C を描く。

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

とおく。点 $(-1, 0)$ を通り X 軸と角 $x/2$ をなすように交わる直線は $Y = t(X+1)$. 中心角と円周角との関係により，この直線と C とのもう一つの交点は $P(\cos x, \sin x)$ である (図 10.1 参照)。$P = (p, q)$ とおくと，(p, q) は直線 $Y = t(X+1)$ と円 $X^2 + Y^2 = 1$ との交点で $p \neq -1$ だから

$$p^2 + t^2(p+1)^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow (t^2+1)p^2 + 2t^2p + t^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow p = \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$p^2 + q^2 = 1$ と $x > 0$ のとき，$q > 0$ であることから，$q = \sin x$ も求まり，

$$\mathrm{t} = \tan\frac{x}{2} \text{ のとき } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}. \tag{10.16}$$

$x = 2\tan^{-1} t$ だから

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}.$$

したがって置換積分により次を得る。

$$\int f(\cos x, \sin x)dx = \int f\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt \tag{10.17}$$

(10.17) を用いて例題 10.2 を再び解いてみよう。

[*15] ここの議論はかなりええかげんなので，議論は忘れて，オイラーの公式だけ覚えてください。

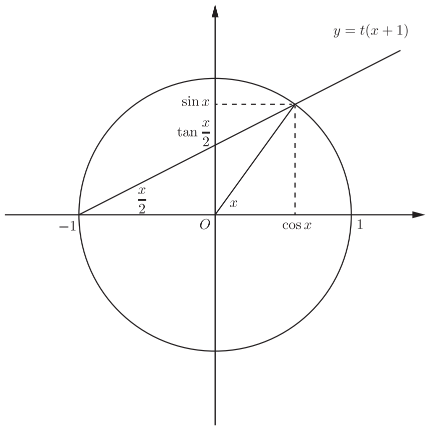

図 10.1

例題 10.4

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

を求める。

解答. J のみを求めればよい。x が 0 から $\pi/2$ まで動くとき，$t = \tan x/2$ は 0 から 1 まで動く。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^1 \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{4t}{(1+t^2)(1+2t-t^2)} dt$$

最後の積分の被積分関数を部分分数分解する。$t^2 - 2t - 1 = 0$ の解を $a = \sqrt{2} + 1$, $b = -\sqrt{2} + 1$ とおく。解と係数との関係により $a + b = 2$, $ab = -1$.

$$\int_0^1 \frac{4t}{(1+t^2)(1+2t-t^2)} dt = \int_0^1 \frac{-4t}{(1+t^2)(t-a)(t-b)} dt$$

$$\begin{aligned} \frac{-4t}{(1+t^2)(t-a)(t-b)} &= \frac{pt+q}{t^2+1} + \frac{r}{t-a} + \frac{s}{t-b} \\ &= \frac{(p+r+s)t^3 + (-2p+q-br-as)t^2 + (-p-2q+r+s)t + (-q-br-as)}{(t^2+1)(t^2-2t-1)} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} 0 &= p + r + s, \\ 0 &= -2p + q - br - as, \\ -4 &= -p - 2q + r + s, \\ 0 &= -q - br - as. \end{aligned}$$

これらを解いて

$$p = q = 1, r = s = -\frac{1}{2}.$$

部分分数分解は

$$\frac{4t}{(1+t^2)(1+2t-t^2)} = \frac{t+1}{t^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t-\sqrt{2}-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t+\sqrt{2}-1}.$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{4t}{(1+t^2)(1+2t-t^2)}dt &= \int_0^1 \left(\frac{t+1}{t^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t-\sqrt{2}-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t+\sqrt{2}-1}\right)dt \\ &= \left[\frac{\log(1+t^2)}{2} + \tan^{-1}t - \frac{1}{2}\log(-t^2+2t+1)\right]_0^1 \\ &\qquad (\because 0 \le t \le 1 \text{ において } t^2-2t-1<0) \\ &= \frac{\log 2}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\log 2}{2} \\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

いかがでしたでしょうか？ 同じ問題を例題 10.2 と例題 10.4 で解いてみた。例題 10.4 の計算は定石通りにに やれば必ず解ける方法。しかし，部分分数分解したり，連立 1 次方程式を解いたりしなければならないので時間と手間がかかる。例題 10.4 の方法で計算した後で例題 10.2 をみるとそれがあまりに簡単なのでがっかりしていまう。

難しい問題にも，どこかにとてもあっさりと解決できる方法があるのかも知れない。

10.5 問題 (無理関数の積分)

問題 32 (1) $f(x)$ が $[-1,1]$ で連続であるとき，次を示せ。

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx. \tag{10.18}$$

(2) 次の積分を求めよ。

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

解答. (1) $I = \displaystyle\int_0^\pi xf(\sin x)dx$ とおく。$u = \pi - u$ とおくと

$$\begin{aligned}I &= \int_0^\pi (\pi-u)f(\sin(\pi-u))du = \int_0^\pi (\pi-u)f(\sin u)du \\ &= \pi\int_0^\pi f(\sin x)dx - I.\end{aligned}$$

よって (10.18) が成り立つ。

(2) $f(\sin x) = \dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x} = \dfrac{x\sin x}{2-\sin^2 x}$ に (1) を応用すると

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} \quad (t=\cos x) \\ &= \frac{\pi}{2}\left[\tan^{-1}t\right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

問題 33　次の問いに答えよ。

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\ dx, \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x\ dx, \quad (n = 0, 1, 2, 3, ...)$$

とおく。$n \geq 1$ のとき，漸化式

$$I_n = a_n + b_n J_{n-1}, \quad J_n = c_n + d_n I_{n-1}$$

が成り立つように定数 a_n, b_n, c_n, d_n を求めよ。

解答.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\ dx = [x^n(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1} \cos x\ dx \\ &= 0 + nJ_{n-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x\ dx = [x^n \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1} \sin x\ dx \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - nI_{n-1}. \end{aligned}$$

よって

$$a_n = 0, \quad b_n = n, \quad c_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n, \quad d_n = -n$$

問題 34　次の定積分を求めよ。（公式を使ってよい）

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\ dx$$

解答. (10.14) 式により

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\ dx &= \left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})) \end{aligned}$$

問題 35

$$I_n = \int_1^e x(\log x)^n\ dx, \quad (n = 0, 1, 2, 3, ...)$$

とおく。次の問いに答えよ。

(1)　部分積分を用いて漸化式

$$I_n = a_n + b_n I_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

をみたす定数 a_n, b_n を求めよ。

(2)　I_2 を求めよ。

解答. (1)

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^2}{2}(\log x)^n\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \left(n(\log x)^{n-1}\frac{1}{x}\right)\ dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2}I_{n-1} \end{aligned}$$

よって

$$a_n = \frac{e^2}{2}, \quad b_n = -\frac{n}{2}$$

(2) $I_0 = (e^2-1)/2$ だから，漸化式を使って

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{e^2}{2} - I_1 = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}I_0\right) \\ &= \frac{I_0}{2} \\ &= \frac{e^2-1}{4}. \end{aligned}$$

注：$\log e$ をそのまま答えた解答があったが，$\log e$ は 1 とすべきである。

図 10.2　今日もつかれた～

11　広義積分

11.1　非有界関数の広義積分

$f(x)$ は半開区間 $(a, b]$ で定義された連続関数とし，$x \to a+0$ のとき $f(x)$ は $+\infty$ か $-\infty$ に発散するようなケースを考える。もし極限

$$\lim_{\epsilon \to +0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\ dx \tag{11.1}$$

が存在するとき，

$$\int_{a}^{b} f(x)\ dx = \lim_{\epsilon \to +0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\ dx \tag{11.2}$$

と書く。

例題 11.1　$\alpha > -1$ のとき，次の積分を計算せよ。

$$\int_{0}^{1} x^{\alpha}\ dx \tag{11.3}$$

解答. $-1 < \alpha < 0$ のときは $\lim\limits_{x \to +0} x^{\alpha} = +\infty$ だから，(11.3) は広義積分である。

$$\begin{aligned} \int_{0}^{1} x^{\alpha}\ dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1} x^{\alpha}\ dx &= \lim_{\epsilon \to +0} \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{\epsilon}^{1} \\ &= \frac{1}{\alpha+1} - \lim_{\epsilon \to +0} \frac{\epsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} \\ &= \frac{1}{\alpha+1}. \quad (\because \alpha+1 > 0) \end{aligned}$$

ちなみに，$\alpha \leq -1$ のとき，(11.3) は発散する。

メモ 11.1　重大な注意　もし，上の計算でいきなり

$$\int_{0}^{1} x^{\alpha}\ dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{0}^{1} = \frac{1}{\alpha+1}$$

と解答したら，この積分が広義積分であることを理解していないと解釈されて不正解になるので注意。

半開区間 $(a, b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対しても，

$$\lim_{\epsilon \to +0} \int_{a}^{b-\epsilon} f(x)\ dx \tag{11.4}$$

が存在するとき，その値を

$$\int_{a}^{b} f(x)\ dx \tag{11.5}$$

と書く。

例題 11.2　次の広義積分を計算せよ。

$$\int_{0}^{1} \log x\ dx$$

解答.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \log x \ dx &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \log x \ dx = \lim_{\epsilon \to +0} [x \log x - x]_\epsilon^1 \\
&= (\log 1 - 1) - \lim_{\epsilon \to +0} (\epsilon \log \epsilon - \epsilon) \\
&= -1. \quad (\because \text{第 6 回問題 } 20)
\end{aligned}
$$

11.2 無限区間上の広義積分

$f(x)$ は無限区間 $[a, \infty)$ で定義された連続関数とする。もし極限

$$\lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x) \ dx \tag{11.6}$$

が存在するとき，

$$\int_a^b f(x) \ dx = \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x) \ dx \tag{11.7}$$

と書く。

$$\int_{-\infty}^b f(x) \ dx = \lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x) \ dx \tag{11.8}$$

についても同様である。

例題 11.3　$\alpha < -1$ のとき，次の積分を計算せよ。

$$\int_1^\infty x^\alpha \ dx \tag{11.9}$$

解答.

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty x^\alpha \ dx &= \lim_{c \to \infty} \int_1^c x^\alpha \ dx = \lim_{c \to \infty} \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_1^c \\
&= \lim_{c \to \infty} \frac{c^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \\
&= -\frac{1}{\alpha+1}. \quad (\because \alpha + 1 < 0)
\end{aligned}
$$

ちなみに，$\alpha \geq -1$ のとき，(11.9) は発散する。

メモ 11.2　重大な注意　もし，上の計算で

$$\int_1^\infty x^\alpha \ dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_1^\infty = -\frac{1}{\alpha+1}$$

と解答したとしたら，そもそも ∞ なんていう数は存在しないから不正解になるので注意。

メモ 11.3　広義積分の計算に役に立つ数式

任意の実数 a に対して $\lim_{x\to\infty} x^a e^{-x} = 0.$
任意の正数 a に対して $\lim_{x\to+0} x^a \log x = 0.$

広義積分の計算のとき，

$$\text{任意の実数 } a \text{ に対して } \lim_{x\to+\infty} x^a e^{-x} = 0 \tag{11.10}$$

は覚えておいた方が便利。$x \to +\infty$ とするから $x > 1$ としてよい。すると $a < n$ となる自然数 n をとると $0 < x^a e^{-x} < x^n e^{-x}$ だから，自然数 n について

$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0 \tag{11.11}$$

を示せばよい。このことはロピタルの定理を用いて示せるが，私は極力ロピタルの定理使わない方針なので別の証明を与える。$n = 0, 1, ...$ についての命題

$$P_n : x > 0 \text{ のとき，} e^x > \frac{x^n}{n!}$$

を考える。$n = 0$ のときの $e^x > 1$ は正しい[*16]。今，P_n が正しいとして

$$f(x) = e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

とおく。

$$f'(x) = e^x - \frac{x^n}{n!}$$

だから数学的帰納法の仮定により $f'(x) > 0$. よって $f(x)$ は単調増加である。

$$f(0) = e^0 = 1 > 0$$

だから $x > 0$ のとき $f(x) > 1 > 0$. よって P_{n+1} が示された。よってすべての $n = 0, 1, 2, ...$ について，P_n は正しい。今，与えられた自然数 n に対して P_{n+1} を用いると

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

は $x > 0$ で成り立つから，もちろん $x > 1$ でも成り立つ。よって

$$0 < x^n e^{-1} < \frac{(n+1)!}{x}.$$

$x \to +\infty$ として (11.11) が成り立つ。次も覚えておくと便利。

$$\text{任意の } a > 0 \text{ に対して } \lim_{x\to+0} x^a \log x = 0 \tag{11.12}$$

$y = -a \log x$ とおくと $x \to +0$ のとき，$y \to +\infty$. さらに $x^a = e^{-y}$ だから，(11.10) により，

$$\lim_{x\to+0} x^a \log x = \lim_{y\to+\infty} \left(-\frac{1}{a}\right) y e^{-y} = 0.$$

[*16] 誤解している人が多いが $0! = 1$ である。

例 5

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

を計算する。第 8 回の例 1 より

$$I_{n+1} = \lim_{r\to\infty} \left[\frac{1}{2n} \frac{x}{(1+x^2)^n} \right]_0^r + \frac{2n-1}{2n} I_n = \frac{2n-1}{2n} I_n$$

これと

$$I_1 = \lim_{r\to\infty} \left[\tan^{-1} x \right]_0^r = \frac{\pi}{2}$$

より， $n \geq 2$ のとき，

$$I_n = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2}.^{*17} \tag{11.13}$$

メモ 11.4　皆さんは今後学ぶかどうかわからないが，広義積分の計算には複素解析学（複素数を舞台にした微分積分学）の留数計算を使うのが便利である。その方が素早く計算できるし，たとえば実数だけの世界で

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

を計算するのはとても面倒くさいが，複素解析学を使うと比較的簡単に

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

が示せる。

例 6

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \tag{11.14}$$

は発散する。

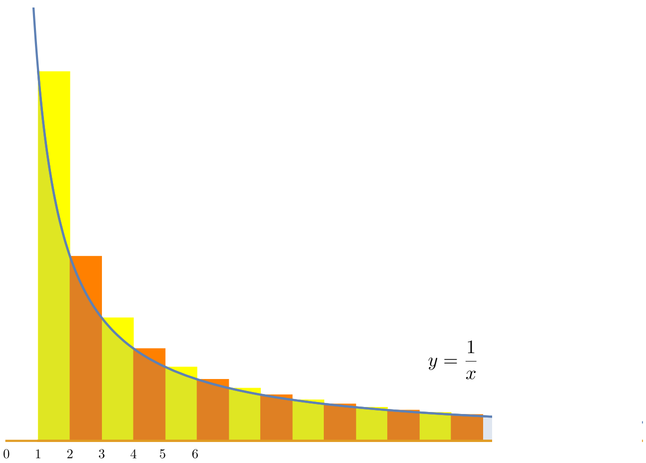

図 11.1　調和級数

*17 k が偶数のとき，$k!! = k(k-2)(k-4)\cdots 4\cdot 2$, k が奇数のとき，$k!! = k(k-2)(k-4)\cdots 3\cdot 1$

$n=1,2,3,...$ に対して R_n を $(n,0)$, $(n+1,0)$, $(n+1,1/n)$, $(n,1/n)$ を頂点にもつ長方形とすると，(11.14) は R_n の面積の和になり，これは

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

より大きいはずである。

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{c\to\infty} \log c = \infty$$

だから (11.14) は発散する。

11.3　ガンマ関数・ベータ関数

定義 11.1

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx \quad (s>0) \tag{11.15}$$

をガンマ関数という。

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\ dx \quad (p>0, q>0) \tag{11.16}$$

をベータ関数という[*18]。

定理 11.1　（ガンマ関数の性質）$s>0$ とする。

(1)　$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
(2)　$\Gamma(n+1) = n!$　$(n=0,1,2,...)$
(3)　$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

証明. (1) (11.10) より

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty x^s e^{-x}dx = \lim_{c\to\infty}\left[x^s(-e^{-x})\right]_0^c + s\int_0^\infty x^{s-1}e^{-s}\ dx = s\Gamma(s).$$

(2)

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\ dx = \lim_{c\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 = 0!$$

と (1) の結果を使うと帰納的に $\Gamma(n+1)=n!$ が示される。ガンマ関数は階乗 $n!$ を連続関数に拡張したものと考えられる[*19]。(3) はここでは証明しないが[*20]，標準正規分布の積分

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 2\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1$$

と関係している。ここで $x=\sqrt{2t}$ によって置換積分すると

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \int_0^\infty e^{-t}\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

となって (3) を得る。

[*18] アルファ関数というのも一応あるらしいが有名ではないし，あまり使われない。三矢の教えに登場する毛利元就の子の中で吉川元春や小早川隆景と比べると知名度が劣る毛利隆元のようなものだ。
[*19] $\Gamma(n)=n!$ ではないことに注意。$\Gamma(n)=n!$ となるようにガンマ関数を定義しなかったことを残念がる人たちもけっこういる。
[*20] 重積分のところで証明するかも知れない。

定理 11.2 （ベータ関数の性質）断らなければ，$p > 0,\, q > 0$ とする。

(1) $B(p,q) = B(q,p)$
(2) $B(p,q+1) = \dfrac{q}{p}B(p+1,q)$
(3) m,n を正整数とすると
$$B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$
証明は省略する。難しくはないので各自やっておいてください。

メモ 11.5 最後の等式から p,q を正整数とすると
$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$
だが，実際は任意の実数 $p,q > 0$ に対して次が成り立つ。

例題 11.4 $a > 0,\, b > 0$ とする。次の広義積分を求めよ。
$$I = \int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)\ dx, \quad I = \int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\ dx.$$
ヒント 11.1 $\cos(-bx) = \cos(bx),\, \sin(-bx) = \sin(bx)$ だから $b > 0$ は本質的な仮定ではないが，$a > 0$ はこの条件がないと広義積分は収束しない。

解答.
$$I = \lim_{c\to\infty}\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\sin bx\right]_0^c + \frac{b}{a}\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\ dx = \frac{b}{a}J,$$
$$J = \lim_{c\to\infty}\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\cos bx\right]_0^c - \frac{b}{a}\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\ dx = \frac{1}{a} - \frac{b}{a}I.$$
よって
$$aI - bJ = 0, \quad bI + aJ = 1.$$
これを解いて
$$I = \frac{b}{a^2+b^2}, \quad J = \frac{a}{a^2+b^2}. \tag{11.17}$$

11.4 問題 (広義積分)

広義積分の問題については，積分が発散する場合は「発散する」と答えよ。

問題 36 次の広義積分を計算せよ。
$$\int_0^1 x^{-\frac{3}{4}}dx$$
解答.
$$\int_0^1 x^{-\frac{3}{4}}dx = \lim_{\epsilon\to+0}\left[4x^{\frac{1}{4}}\right]_\epsilon^1 = 4.$$

問題 37　次の広義積分を計算せよ。

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{3}} \log x \ dx$$

解答.

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{3}} \log x \ dx = \lim_{\epsilon \to +0} \left[\frac{3}{4} x^{4/3} \log x \right]_\epsilon^1 - \frac{3}{4} \int_0^1 x^{1/3} \ dx = -\frac{9}{16}.$$

問題 38　次の広義積分を計算せよ。

$$\int_1^\infty x^{-\frac{4}{3}} \ dx$$

解答.

$$\int_1^\infty x^{-\frac{4}{3}} \ dx = \lim_{c \to \infty} \left[-3x^{-1/3} \right]_1^c = 3.$$

問題 39　次の広義積分を計算せよ。

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x} \ dx$$

解答.

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x} \ dx = \lim_{c \to \infty} \left[\frac{(\log x)^2}{2} \right]_1^c$$

は $+\infty$ に発散する。

問題 40　次の広義積分を計算せよ。ノートにある公式を用いてよい。

$$\int_0^\infty e^{-2x} \cos(3x) \ dx$$

解答.

$$\frac{2}{13}$$

図 11.2　おつかれ〜

12　多変数関数の微分

12.1　偏微分

12.1.1　偏導関数

$f(x,y)$ を 2 変数 x, y の関数とする。$f(x,y)$ の x や y についての微分を考えたいので，$f(x,y)$ の定義域 D は次の性質をもつとする。$P=(a,b)$ が D の点ならば，P を中心とする十分小さな円板

$$\mathbb{D}(P,r)=\{(x,y):(x-a)^2+(y-b)^2<r^2\}$$

も D に含まれる。こうした性質をもつ xy 平面の部分集合を開集合という。以下，考える関数 $f(x,y)$ の定義域は開集合とする。

定義 12.1　$P=(a,b)\in D$ とする。

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

が存在するとき，それぞれ $f(x,y)$ の P における x **偏微分係数**, y **偏微分係数**という。

$$f_x(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\quad f_y(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

とも書く。もし D のすべての点で $f(x,y)$ の x 偏微分係数, y 偏微分係数が存在すれば，x **偏導関数**, y **偏導関数**

$$f_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\quad f_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

が定まる。$f_x(x,y)$ は y を定数と見なして $f(x,y)$ を x で微分したもの，$f_y(x,y)$ は x を定数と見なして $f(x,y)$ を y で微分したものといってよい。

例題 12.1　$f(x,y)=x^3+2x^2y-xy^2-y^3$ の x 偏導関数, y 偏導関数を求めよ。

解答. 上にも書いたように x 偏導関数を計算するには y を定数と思って x について微分すればよい。y 偏導関数についても同様。

$$f_x=3x^2+4xy-y^2,\quad f_y=2x^2-2xy-3y^2$$

メモ 12.1　3 変数，4 変数，より一般に n 変数の関数についても同様である。たとえば $f(x,y,z)=xy^2z^3$ ならば

$$f_x(x,y,z)=y^2z^3,\ f_y(x,y,z)=2xyz^3,\ f_z(x,y,z)=3xy^2z^2.$$

12.1.2 高階偏導関数

$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ が偏微分可能ならば，それらの偏導関数も定義できる。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\cdots \tag{12.1}$$

微分の順番に気をつけないといけない。先に y で偏微分し，その後で x で偏微分するならば

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\quad \text{一方で}\quad (f_y)_x=f_{yx}$$

つまり

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=f_{yx}$$

となって x, y の順番が逆になる。$f_{xy}(x,y)\neq f_{yx}(x,y)$ となることもあるのでうかつに順番を逆にできない。しかし，このようなことが起こるのは，すごくひねくれた関数に対してであって，次のことがいえる。

> $f(x,y)$ が x,y について無限回微分できるならば，すべての高階偏導関数は偏微分の順序によらない。たとえば $f_{xxyy}=f_{xyxy}=f_{xyyx}=f_{yxyx}=f_{yxxy}=f_{yyxx}$ などがいえる。

上の例題 $f(x,y)=2x^2-2xy-3y^2$ では

$$\begin{aligned} f_{xx}&=6x+4y, & f_{xy}&=4x-2y\\ f_{yx}&=4x-2y, & f_{yy}&=-2y-6y \end{aligned}$$

でちゃんと $f_{xy}=f_{yx}$ がなりたっている。

12.1.3 全微分可能性

実は偏微分係数だけではあまり役に立たない。というのは偏微分は x 方向，および y 方向からのたった 2 方向からの微分しか考えていないからである。たとえば θ 方向微分

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(a+h\cos\theta,b+h\sin\theta)-f(a,b)}{h}$$

あるいは (a,b) を通る曲線 $(x(t),y(t))$ $(x(0),y(0))=(a,b)$ に沿っての微分 (図 12.1 参照)

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x(t),y(t))-f(a,b)}{t}$$

などなども本当は考えないといけない。

$f(x,y)$ が (a,b) において 1 次式でとてもよく近似できるとき，すなわち

$$f(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(x-b)+g(x,y) \tag{12.2}$$

とおくと (青が 1 次式のパート),

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{g(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0 \tag{12.3}$$

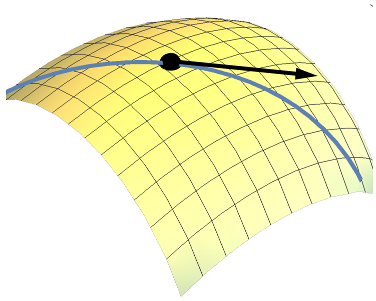

図 12.1　曲線に沿っての微分 (接ベクトル)

が成り立つとき，$f(x,y)$ は (a,b) で全微分可能であるという。このときは

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(a+h\cos\theta,b+h\sin\theta)-f(a,b)}{h}=f_x(a,b)\cos\theta+f_y(a,b)\sin\theta$$

$$\lim_{t\to0}\frac{f(x(t),y(t))-f(a,b)}{t}=f_x(a,b)x'(0)+f_y(a,b)y'(0)$$

と θ 方向微分や曲線に沿っての微分はすぐにわかる。それに

> $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ が連続ならば，定義域のすべての点で $f(x,y)$ は全微分可能である

が成り立つ。この後扱う関数は $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ が連続なものだけなので，全微分可能性についてあまり神経を使う必要はない。「全微分可能である」とは幾何学的には次節の xyz 空間内の曲面 $z=f(x,y)$ が $(a,b,f(a,b))$ で接平面をもつことを保証するための条件と考えてもらってよい。

12.2　接平面

$F(x,y,z)$ を 3 変数の関数で x，y，z についてそれぞれ連続な偏導関数 F_x，F_y，F_z をもつとする。

例 7　$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-r^2$ $(r>0)$ とおくと，$F(x,y,z)=0$ をみたす (x,y,z) は原点中心，半径 r の球面である。

$F(x,y,z)=0$ をみたすすべての点 (x,y,z) で

$$(F_x(x,y,z),F_y(x,y,z),F_z(x,y,z))\neq(0,0,0)$$

ならば，$F(x,y,z)=0$ は一つの曲面 S を定める。$F(a,b,c)=0$ のとき，(a,b,c) において S に接する平面 (接平面) は次の式で表される。

$$F_x(a,b,c)(x-a)+F_y(a,b,c)(y-b)+F_z(a,b,c)(z-c)=0. \tag{12.4}$$

とくに S が 2 変数の関数 $f(x,y)$ のグラフが描く曲面 $z=f(x,y)$ であるとき，点 (a,b,c) $(c=f(a,b))$ における接平面は

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z$$

に (12.4) を応用して[*21]

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b). \tag{12.5}$$

例題 12.2　$P=(a,b,c)$ が (x,y,z) は原点中心，半径 r の球面 S 上の点のとき，P における S の接平面を求めよ。

解答．$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-r^2$ とおくと，接平面の方程式

$$F_x(a,b,c)(x-a)+F_y(a,b,c)(y-b)+F_z(a,b,c)(z-c)=0 \iff 2a(x-a)+2b(y-b)+2c(z-c)=0$$

よって

$$a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)=0.$$

これは点 $P=(a,b,c)$ を通ってベクトル $\overrightarrow{OP}$ に直交する平面である。$a^2+b^2+c^2=r^2$ だから

$$ax+by+cz=r^2.$$

12.3　合成関数の偏微分

定理 12.1　(合成関数の偏微分) $f(x,y)$ は偏微分可能で，$f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ は連続とする。$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ が偏微分可能ならば

$$g(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$$

とおくとき，

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \tag{12.6}$$

よく使われるのが極座標変換

$$x=x(r,\theta)=r\cos\theta, \qquad y=y(r,\theta)=r\sin\theta \tag{12.7}$$

のときだから，このときの (12.6) を見ておこう。ただし，u,v のかわりに r と θ である。

$$\frac{\partial g}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta, \qquad \frac{\partial g}{\partial \theta}=-\frac{\partial f}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta \tag{12.8}$$

しかし，本当に役に立つのはこの逆変換である。
◇ ここから，次のダイヤモンドのマークまでは永久保存版である。そのうち役に立つのでコピーしてクリアファイルか何かに入れて残しておくのがよいだろう。例えば θ の動く範囲を $-\pi/2<\theta<\pi/2$ に限定すると

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}. \tag{12.9}$$

[*21] $F_z(a,b,c)=-1\neq 0$ だから接平面は必ず存在する。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) \\
&= \frac{\partial g}{\partial r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{y}{x^2+y^2} \\
&= \frac{\partial g}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{\partial g}{\partial r}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{x}{x^2+y^2} \\
&= \frac{\partial g}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r},
\end{aligned}
$$

まとめると

$$
\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}. \tag{12.10}
$$

実はこの式はすべての θ について成り立つ[*22]。さらに偏微分を続けて

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\cos\theta - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\frac{\sin\theta}{r} \\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\theta - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\sin\theta}{r} \\
&= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\cos\theta - \frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r^2}\right)\cos\theta - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}\cos\theta - \frac{\partial g}{\partial r}\sin\theta - \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\frac{\sin\theta}{r} - \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\sin\theta}{r} \\
&= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2} + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r} + 2\frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\sin\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\frac{\cos\theta}{r} \\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\sin\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\cos\theta}{r} \\
&= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\sin\theta + \frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r} - \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\sin\theta + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}\sin\theta + \frac{\partial g}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\frac{\cos\theta}{r} - \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\cos\theta}{r} \\
&= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\sin^2\theta + 2\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\frac{\cos^2\theta}{r^2} + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r} - 2\frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}.
\end{aligned}
$$

を得る。[*23]

定義 12.2

$$
\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{12.11}
$$

[*22] $0 < \theta < \pi$ のときは $\theta = \cot^{-1}\dfrac{x}{y}$ とするなど，場合分けして考えないといけないので面倒だが。

[*23] タイプミスをしていないか心配だが, 残りの一つも書いておこう。

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\sin\theta\cos\theta - \frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{r} - \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} - \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{r^2}.
$$

を f のラプラシアンという。ラプラシアンは熱方程式や波動方程式に出てくる重要な微分作用素である。$\Delta f = 0$ をみたす関数を調和関数という。上の計算からラプラシアンを極座標を用いて表すと

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}. \tag{12.12}$$

$\diamondsuit$

例題 12.3　$f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ は調和関数であることを確かめよ。

解答.

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$f_{xx} = 2\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad f_{xx} = 2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

よって $\Delta f = 0$.
(その 2) 極座標を用いると $f(x,y) = \log(x^2+y^2) = \log r^2$. $g(r) = \log r^2 = 2\log r$ とおく。

$$\begin{aligned}\Delta g &= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2}{r}\right) + \frac{1}{r}\cdot\frac{2}{r} \\ &= -\frac{2}{r^2} + \frac{2}{r^2} = 0.\end{aligned}$$

(12.12) より $\Delta f = 0$. この場合は極座標で考えると θ によらない r だけの関数 $(2\log r)$ になるので計算の手間を少し省くことができる。

例題 12.4　$f(x,y)$ が $r = \sqrt{x^2+y^2}$ のみに依存する調和関数であるとき，$f(x,y)$ を求めよ。

解答.　仮定より $f(x,y) = g(r)$ と書くことができる。

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} = g''(r) + \frac{1}{r}g'(r) = 0$$

$(g'(r)$ は r についての微分$)$. $h(r) = g'(r)$ とおくと

$$h'(r) + \frac{1}{r}h(r) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dr}\log h(r) = \frac{h'(r)}{h(r)} = -\frac{1}{r} \;\Rightarrow\; \log h(r) = -\log r + C.$$

したがって

$$g'(r) = h(r) = \frac{c_1}{r} \qquad (c_1 = e^C)$$

となり，$g(r) = c_1\log r + c_2$. (c_2 は積分定数). よって $c_1/2$ を改めて c_1 とおいて答は

$$f(x,y) = c_1\log(x^2+y^2) + c_2.$$

12.4　問題 (多変数関数の微分)

問題 41　次の関数について f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を求めよ。

例.　$f(x,y) = x^4 + \dfrac{x}{y}$.

(解答)

$$f_x = 4x^3 + \frac{1}{y},\quad f_y = -\frac{x}{y^2},\quad f_{xx} = 12x^2,\quad f_{xy} = -\frac{1}{y^2},\quad f_{yy} = \frac{2x}{y^3}$$

(1)　$f(x,y) = x^2y^2$

(2)　$f(x,y) = e^{x+2y}$

(3)　$f(x,y) = \sin(2x+y)$

(4)　$f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

解答. f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} の 3 つ以上正解で 1 点，ただし，すべて正解は 2 点，それ以外は 0 点

(1)

$$f_x = 2xy^2,\quad f_y = 2x^2y,\quad f_{xx} = 2y^2,\quad f_{xy} = 4xy,\quad f_{yy} = 2x^2$$

(2)

$$f_x = e^{x+2y},\quad f_y = 2e^{x+2y},\quad f_{xx} = e^{x+2y},\quad f_{xy} = 2e^{x+2y},\quad f_{yy} = 4e^{x+2y}$$

(3)

$$f_x = 2\cos(2x+y),\qquad f_y = \cos(2x+y),$$

$$f_{xx} = -4\sin(2x+y),\quad f_{xy} = -2\sin(2x+y),\quad f_{yy} = -\sin(2x+y)$$

(4)

$$f_x = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2},\quad f_y = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_{xx} = \frac{2(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3},\quad f_{xy} = \frac{8xy}{(x^2+y^2)^3},\quad f_{yy} = \frac{2(-x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

問題 42　次式が $(x-1)^2 + 2y^2 + 3(z+1)^2 = 15$ で定まる曲面（楕円面）の点 $(2,-1,1)$ における接平面を表すように定数 a,b,c,d を求めよ。

$$ax + by + cz = d$$

解答. (2 点)　$F(x,y,z) = (x-1)^2 + 2y^2 + 3(z+1)^2 - 15$ とおくと

$$F_x(x,y,z) = 2(x-1),\ F_y(x,y,z) = 4y,\ F_z(x,y,z) = 6(z+1)$$

よって，点 $(2,-1,1)$ における接平面の方程式は

$$F_x(2,-1,1)(x-2) + F_y(2,-1,1)(y+1) + F_z(2,-1,1)(z-1) = 0$$

すなわち，

$$2(x-2) - 4(y+1) + 12(z-1) = 0$$

よって

$$2x - 4y + 12z = 18.$$

答.

$$a = 2,\ b = -4,\ c = 12,\ d = 20.$$

あるいは，すべて 2 で割って

$$a = 1,\ b = -2,\ c = 6,\ d = 10.$$

こっちの答の方がよい。

図 12.2　おつかれ〜

13　多変数関数の極値問題

13.1　多変数関数の極大値・極小値

1 変数関数 $f(x)$ の極値については次のことが成り立っていた。

$(*)$　$f(x)$ が $x=a$ で極値をとれば $f'(a)=0$.

$f''(a)>0$	a の近くで $f(x)$ は下に凸	$f(a)$ は極小値
$f''(a)<0$	a の近くで $f(x)$ は上に凸	$f(a)$ は極大値

多変数の関数についても 2 階偏微分係数を調べることによって極値を求めることができる。

定義 13.1

$$\Delta(a,b)=\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}(a,b)^2. \tag{13.1}$$

とおく。[*24]

定理 13.1　もし，関数 $f(x,y)$ が (a,b) で極値をとれば

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0 \tag{13.2}$$

である。(13.2) が成り立つとき

(i)	$f_{xx}(a,b)>0$	$\Delta(a,b)>0$	$f(x,y)$ は (a,b) で極小値をとる。
(ii)	$f_{xx}(a,b)<0$	$\Delta(a,b)>0$	$f(x,y)$ は (a,b) で極大値をとる。
(iii)		$\Delta(a,b)<0$	$f(x,y)$ は (a,b) で極値をとらない。

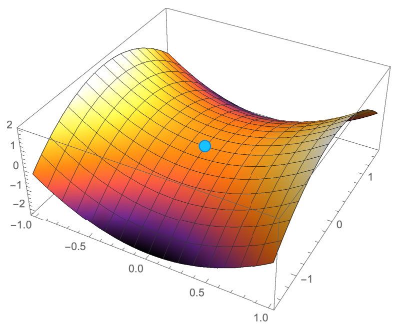

図 13.1　(iii) の極大値でも極小値でもないケース。乗馬の鞍 (くら) に似ているので鞍点と呼ばれる。

[*24] ここで 2 行 2 列の行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

の記号を使っている。多分線形代数学の講義で習っているだろう。ここでは 2 変数の関数の極値しか扱わないが, n 変数の関数の極値を求めるには行列式がもっと活躍する。

ヒント 13.1　(13.2) は成り立っているとする。もし $\Delta(a,b)=0$ であれば，極値の判定はできない。つまり，極大値をとることもあるし，極小値をとることもあるし，あるいは極値をとらないこともある。

例題 13.1　$f(x,y)=x^2-xy+y^2-3y+1$ の極値を求めよ。

解答.　まず (13.2) をみたす点を見つける。

$$f_x=2x-y=0,\quad f_y=-x+2y-3=0$$

を解くと $x=1$, $y=2$. 次に極値であるかどうかを調べる。

(i) $f_{xx}(1,2)=2>0$

(ii)
$$\Delta(1,2)=\begin{vmatrix} f_{xx}(1,2) & f_{xy}(1,2) \\ f_{xy}(1,2) & f_{yy}(1,2) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2\times 2-(-1)\times(-1)=3>0$$

したがって $f(x,y)$ は $(1,2)$ で極小値 -2 をとる。

例題 13.2　$f(x,y)=x^2-2xy-2y^2$ の極値を求めよ。

解答.　まず (13.2) をみたす点を見つける。

$$f_x=2x-2y=0,\quad f_y=-2x-4y=0$$

を解くと $x=0$, $y=0$. 次に極値であるかどうかを調べる。

(i) $f_{xx}(0,0)=2>0$

(ii)
$$\Delta(0,0)=\begin{vmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}=2\times(-4)-(-2)\times(-2)=-12<0$$

したがって $f(x,y)$ は極値をもたない。

メモ 13.1　$\Delta(0,0)<0$ だから $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値をとらないことがわかったので，(i) の $f_{xx}(0,0)>0$ は調べる必要がなかったのである。だから，順序としては (a,b) が (13.2) をみたすとして，

(i)　$\Delta(a,b)$ が正か負かを調べる。($\rightarrow$ 負ならば極値でない。正ならば (ii) へ進む)

(ii)　$f_{xx}(a,b)$ が正か負かを調べる。($\rightarrow$ 正ならば極小値。負ならば極大値)

と進めた方がよい。

上の例はやさしいので (2 階偏導関数が定数になる)，ちょっと面倒な問題を挙げておく。

例題 13.3　$f(x,y)=(2x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$ の極値を求めよ。

解答.　まず (13.2) をみたす点を見つける。

$$f_x=2x(2-2x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}=0,\quad f_y=2y(1-2x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}=0$$

よって

「(a) $x=0$ または (b) $2-2x^2-y^2=0$」かつ「(c) $y=0$ または (d) $1-2x^2-y^2=0$」

$$\begin{array}{lcl} \text{(a)+(c)} & \Rightarrow & (x,y)=(0,0) \\ \text{(a)+(d)} & \Rightarrow & (x,y)=(0,\pm 1) \\ \text{(b)+(c)} & \Rightarrow & (x,y)=(\pm 1,0) \\ \text{(b)+(d)} & \Rightarrow & \text{解なし} \end{array}$$

$$f_{xx}=2(2-10x^2-y^2+4x^4+2x^2y^2)e^{-(x^2+y^2)} \qquad f_{xy}=-4xy(3-2x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{xy}=-4xy(3-2x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)} \qquad f_{yy}=2(1-2x^2-5^2+4x^2y^2+2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\Delta(x,y)=\begin{vmatrix} 2(2-10x^2-y^2+4x^4+2x^2y^2)e^{-(x^2+y^2)} & -4xy(3-2x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)} & e^{-(x^2+y^2)} \\ -4xy(3-2x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)} & 2(1-2x^2-5^2+4x^2y^2+2y^2) & \end{vmatrix}$$

だから

(a,b)	$f_{xx}(a,b)$	$\triangle(a,b)$	
$(0,0)$	$4>0$	$8>0$	極小値 0 をとる。
$(\pm 1,0)$	$-8e^{-1}<0$	$16e^{-2}>0$	極大値 $2e^{-1}$ をとる。
$(0,\pm 1)$	$2e^{-1}$	$-8e^{-2}<0$	極値ではない。

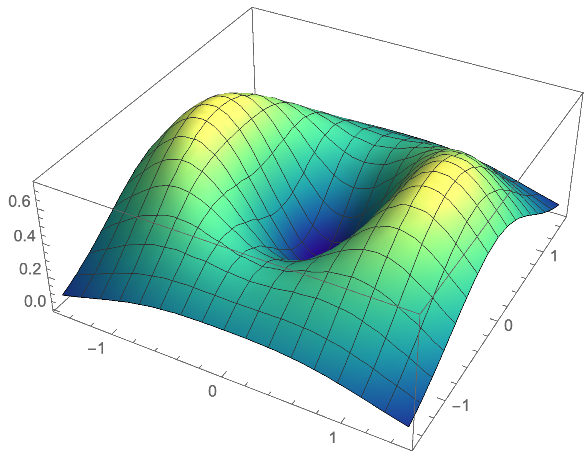

図 13.2　$f(x,y)=(2x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$ のグラフ

13.2　条件付き極値問題

定理 13.2　(ラグランジュの未定乗数法 (x,y) が

$$(\text{条件})\ f(x,y)=0$$

をみたしながら変化するときに点 (a,b) で $g(x,y)$ が極値をとるとする。このとき $(f_x(a,b),f_y(a,b))\neq(0,0)$ ならばある実数 λ が存在して

$$\begin{cases} g_x(a,b)+\lambda f_x(a,b)=0 \\ g_y(a,b)+\lambda f_y(a,b)=0 \end{cases} \tag{13.3}$$

をみたす。

この定理の弱点は $g(x,y)$ が極値をとる点の候補を与えるだけで，実際に極値を与えるかどうかについては何も言っていないことである。それでもいろいろ役に立つ定理である。

xy-平面を地図と見てそこに描かれた曲線 $C: f(x,y)=0$ を考える。$g(x,y)$ は地点 (x,y) の標高を表すものとすると，実数 c に対して $g(x,y)=c$ は等高線である。等高線 $g(x,y)=g(a,b)$ が (a,b) で C と横断的に交われば，そこでは曲線 C に沿う傾斜があるので $g(a,b)$ は極値でない。等高線 $g(x,y)=g(a,b)$ が C と接すれば (a,b) から曲線に沿ってどちらの向きに進んでも登り (あるいは降り）であるから $g(a,b)$ は極値ということである。(13.3) は (a,b) で C と等高線 $g(x,y)=g(a,b)$ が接する条件と捉えればよい。3 変数でも同じ定理が成り立つ。

定理 13.3　(ラグランジュの未定乗数法) (x,y,z) が

$$(\text{条件})\ f(x,y,z)=0$$

をみたしながら変化するときに点 (a,b,c) で $g(x,y,z)$ が極値をとるとする。このとき

$$(f_x(a,b,c), f_y(a,b,c), f_z(a,b,c)) \neq (0,0,0)$$

ならばある実数 λ が存在して

$$\begin{cases} g_x(a,b,c)+\lambda f_x(a,b,c)=0 \\ g_y(a,b,c)+\lambda f_y(a,b,c)=0 \\ g_z(a,b,c)+\lambda f_z(a,b,c)=0 \end{cases} \tag{13.4}$$

をみたす。

同じ形の定理は n 変数でも成り立つ。

例題 13.4　周の長さが一定（その値を $2s$ とする）の三角形の中で面積が最大になるものを求めよ。

解答. 3 辺の長さを x, y, z とすると，条件は $x+y+z=2s$. すなわち

$$(\text{条件})\ f(x,y,z)=x+y+z-2s=0.$$

すべての点で

$$(f_x(x,y,z), f_y(ax,y,z), f_z(x,y,z))=(1,1,1)\neq(0,0,0)$$

ヘロンの公式により三角形の面積を $S(x,y,z)$ とおくと

$$S(x,y,z)=\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

$S(x,y,z)$ の最大値を求めればよいが，$S(x,y,z)^2$ の最大値を求めてもよい（その方が計算が楽)。よって

$$g(x,y,z)=s(s-x)(s-y)(s-z)$$

とおく。先に進む前に探すべき (x,y,z) の存在範囲を確かめておこう。まず x,y,z は辺の長さだから

$$x>0,\quad y>0,\quad z>0.$$

次に三角形の 2 辺の長さの和は残りの辺の長さより大きいから

$$x<y+z,\quad y<z+x,\quad z<x+y.$$

したがって探すべき (x, y, z) の存在範囲は図 13.3 の赤色の三角形の内部

$$R = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z = 2s, x < y + z, y < z + x, z < x + y\}$$

三角形の内部の点 (x, y, z) では

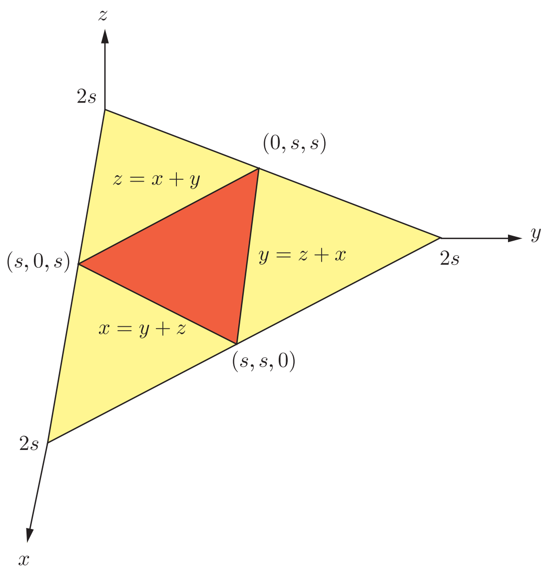

図 13.3　赤色の三角形が探すべき (x, y, z) の範囲

$$\begin{aligned} 2x < x + (y + z) = 2s \Rightarrow s - x > 0, \\ 2y < y + (z + x) = 2s \Rightarrow s - y > 0, \\ 2z < (x + y) + z = 2s \Rightarrow s - z > 0 \end{aligned}$$

だから $g(x, y, z) > 0$. 三角形の辺上の点は $x = y + z$, $y = z + x$ あるいは $z = x + y$ のどれかをみたす。例えば $x = y + z$ をみたせば

$$-x + y + z = 0, \quad x + y + z = 2s$$

より $s = x$. よって $g(x, y, z) = 0$ である。同様にして (x, y, z) の赤色の三角形の周上にあれば $g(x, y, z) = 0$ である。

この場合の (13.4) は ((a, b, c) に置き換えず (x, y, z) のままで考える)

$$\lambda = s(s - y)(s - z), \quad \lambda = s(s - x)(s - z), \quad \lambda = s(s - x)(s - y)$$

よって

$$(s - y)(s - z) = (s - x)(s - z) = (s - x)(s - y).$$

R のなかで (x, y, z) を探すから $s - x > 0$, $s - y > 0$, $s - z > 0$ としてよい。$(s - y)(s - z) = (s - x)(s - z)$ より，$s - y = s - x$. したがって $x = y$. 同様にして $y = z$, $z = x$ を得て，$x = y = z$ となる。よって

$$(x, y, z) = \left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right)$$

が極値をとる候補となる。

さて関数 $g(x,y,z)$ は連続関数で赤い三角形の内部 R 上では正の値をとり，R の辺上では常に値 0 をとる。したがって $g(x,y,z)$ は R の内部のある点 (a,b,c) で最大値を取る。そのような (a,b,c) はいくつもあるかもしれない。そして，それらはすべてラグランジュの未定乗数法の (13.4) をみたす。ところが (13.4) をみたす点は $(x,y,z)=\left(\frac{2s}{3},\frac{2s}{3},\frac{2s}{3}\right)$ の一つしかなかったので，この点で $g(x,y,z)$ は最大値をとらざるを得ない。

$$g\left(\frac{2s}{3},\frac{2s}{3},\frac{2s}{3}\right)=\frac{s^4}{3^3}.$$

答. 周の長さが s の三角形の中で面積が最大なのは正三角形で，その面積は $\dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$ である。

他にも条件付き極値問題の例を挙げておこう。

例題 13.5　点 (p,q) から直線 $ax+by=d$ までの最短距離を求めよ[*25]。ヒント：$f(x,y)=ax+by-d$, $g(x,y)=\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}$ (あるいは $g(x,y)=(x-p)^2+(y-q)^2$) とおく。

解答. $f(x,y)=ax+by-d$, $g(x,y)=(x-p)^2+(y-q)^2$ とおくと

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\lambda\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2(x-p)-\lambda a=0$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)-\lambda\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2(y-q)-\lambda b=0$$

を解いて

$$x=p+\frac{\lambda}{2}a,\quad y=q+\frac{\lambda}{2}b.$$

(x,y) は直線 $ax+by=d$ 上にあるから

$$a\left(p+\frac{\lambda}{2}a\right)+b\left(q+\frac{\lambda}{2}b\right)=d.$$

よって

$$\frac{\lambda}{2}=\frac{d-(ap+bq)}{a^2+b^2}.$$

$$(x-p)^2+(y-q)^2=\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2(a^2+b^2).$$

よって最短距離は $\dfrac{|ap+bq-d|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

[*25] 最短距離を与える点の存在は認めてよい。

例題 13.6　(x,y) が単位円 $x^2+y^2=1$ を動くとき，$ax^2+2bxy+cy^2$ の最大値と最小値を求めよ。ヒント：$f(x,y)=x^2+y^2-1$, $g(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ とおく。

解答. $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$, $g(x,y)=x^2+y^2-1$ とおく。(x,y) で $f(x,y)$ が条件付き極値をとるとすると，ある λ が存在してとおく。

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\lambda\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=2(ax+by-\lambda x)=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\lambda\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=2(bx+cy-\lambda y)=0$$

よって

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$x^2+y^2=1$ だから $(x,y)\neq(0,0)$. したがって λ は $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値。このとき

$$\begin{aligned} f(x,y)&=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &=\lambda\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\lambda(x^2+y^2)=\lambda. \end{aligned}$$

固有方程式 $(\lambda-a)(\lambda-c)-b^2=0$ を解いて，

$$\text{最大値}\quad \frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2},\ \text{最小値}\ \frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}.$$

13.3　問題 (多変数関数の極値問題)

問題 43

$$f(x,y)=x^2+xy+y^2+2x+4y$$

とおく。次の問いに答えよ。

(1)　偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を計算せよ。

(2)　$f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$ をみたす点 (a,b) を求めよ (注：一通りに定まる)。

(3)　問 (2) で求めた (a,b) に対して

$$\Delta(a,b)=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}(a,b)^2$$

を計算せよ。

(4)　(a,b) で $f(x,y)$ は極大値をとるか，極小値をとるかあるいは極値をとらないかを答えよ。極値をとる場合はその極値を答えよ。

解答.

(1) $f_x(x,y) = 2x + y + 2,\ f_y(x,y) = x + 2y + 4.$

(2) $(a,b) = (0,-2)$

(3) $f_{xx} = 2,\ f_{xy} = 1,\ f_{yy} = 2$ だから

$$\Delta(2,0) = 2 \times 2 - 1 \times 1 = 3$$

(4) $f_{xx}(-2,0) = 2 > 0,\ \Delta(-2,0) = 3 > 0$ だから $f(x,y)$ は $(0,-2)$ で極小値 -4 をとる。

次の問題は小問に細かく分けないので，一連の作業を各自で行ってください。計算は少し面倒です。

問題 44　$f(x,y) = (x+y)e^{-xy}$ の極値を求めよ。ただし，極値がない場合は「極値なし」と答えよ。

解答. $f_x = (1 - y^2 - xy)e^{-xy},\ f_y(x,y) = (1 - x^2 - xy)e^{-xy}.$ $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ をみたす点は

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{(複号同順)}$$

2 階偏微分を計算する。

$$\begin{aligned} f_{xx} &= y(y^2 + xy - 2)e^{-xy} & \qquad f_{xy} &= (x+y)(xy-2)e^{-xy} \\ f_{xy} &= (x+y)(xy-2)e^{-xy} & \qquad f_{yy} &= x(x^2 + xy - 2)e^{-xy} \end{aligned}$$

$$\Delta(x,y) = y(y^2 + xy - 2)x(x^2 + xy - 2)e^{-2xy} - (x+y)^2(xy-2)^2e^{-2xy}$$

よって

$$\Delta(a,a) = 4a^2(2a^2 - 3)e^{-2a^2}.$$

a に $\pm 1/\sqrt{2}$ を代入すると

$$\Delta\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -4e^{-1} < 0$$

よって $f(x,y)$ は極値をもたない。

メモ 13.2　$f(x,y)$ は x と y について対象だから，f_x, f_{xx}, f_{xy} だけ計算すればよい。残りは x と y を交換すればよい。

図 13.4　おつかれ～

14　最終回 重積分

14.1　累次積分

xy 平面の集合 D 上で定義された関数 $f(x,y)$ の積分 (重積分)

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy \tag{14.1}$$

を考えたい。もし $f(x,y)>0$ ならば (14.1) は D と $z=f(x,y)$ のグラフ (曲面) の間にある図形の体積を表す。一般的な状況で議論すると大変なので次のような縦線型領域

$$D=\{(x,y): a\le x\le b, \varphi(x)\le y\le \psi(x)\}\quad (\text{図 14.1 左}) \tag{14.2}$$

あるいは横線型領域[*26]

$$D=\{(x,y): a\le y\le b, \varphi(y)\le x\le \psi(y)\}\qquad (\text{図 14.1 右}) \tag{14.3}$$

での重積分を考える。$f(x,y)$ を D 上で定義された連続関数[*27]とするとき，

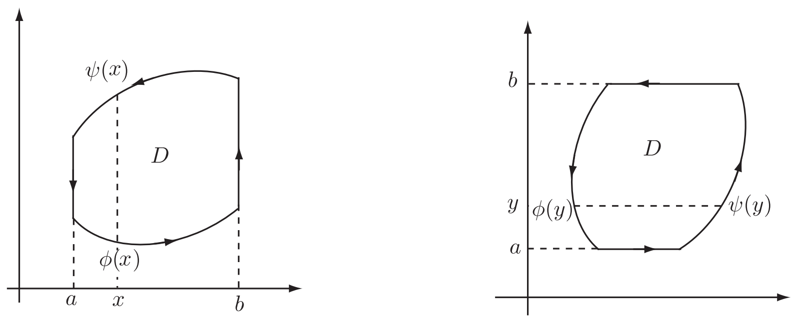

図 14.1　縦線型領域 (左) と横線型領域 (右)

定義 14.1　D が縦線型領域 (図 14.1 の左図) のとき，

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\ dy\right)dx$$

D が横線型領域 (図 14.1 の右図) のとき，

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\ dx\right)dy$$

例題 14.1　$D=\{(x,y): 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ のとき，次の積分を計算する。

$$\iint_D (x^2+y^2)\ dxdy$$

[*26] 実はこちらも y 軸に関する縦線型領域という。

[*27] 多変数の連続関数の定義を述べていないが，この後でてくる関数はすべて連続関数なので，この部分は今は気にしなくてよい。

解答. D を図 14.1 の左図で $a=0,\ b=1,\ \varphi(x)=0,\ \psi(x)=1$ の場合と考える。

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)\ dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2+y^2)\ dy\right) dx\\ &= \int_0^1 \left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} dx \quad ([F(x,y)]_{y=a}^{y=b}=F(x,b)-F(x,a)\ \text{とする})\\ &= \int_0^1 \left(x^2+\frac{1}{3}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

例題 14.2　$D=\{(x,y): x^2+y^2\leq x\}$ のとき，次の積分を計算する。

$$\iint_D \sqrt{x}\ dxdy$$

解答. まず D がどのような集合かを知らなければならない。$x^2+y^2\leq x$ を変形すると

$$x^2-x+\frac{1}{4}+y^2\leq\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leq\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

だから D は $(1/2,0)$ 中心，半径 $1/2$ の円とその内部である。

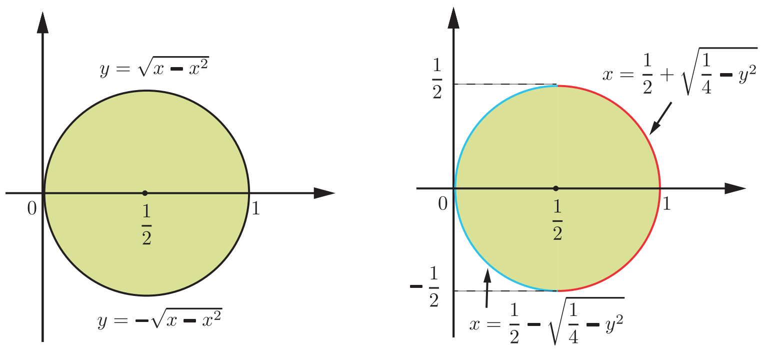

図 14.2

$$D=\{(x,y): 0\leq x\leq 1, -\sqrt{x-x^2}\leq y\leq\sqrt{x-x^2}\}$$

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x}\ dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \sqrt{x}\ dy\right) dx = \int_0^1 \left[\sqrt{x}y\right]_{y=-\sqrt{x-x^2}}^{y=\sqrt{x-x^2}} dx\\ &= \int_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{x-x^2}\ dx = \int_0^1 2x\sqrt{1-x}\ dx\\ &= \int_0^1 2(1-t^2)t(2t)\ dt \quad (t=\sqrt{1-x}\ \text{とおいた})\\ &= 4\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{8}{15}.\end{aligned}$$

メモ 14.1　例題 14.1, 14.2 は横型領域でも計算できる。例題 14.1 については,

$$
\begin{aligned}
\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2+y^2)\,dx\right) dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + xy^2\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}+y^2\right) dy \\
&= \left[\frac{y}{3}+\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

例題 14.2 については $\cdots$ 面倒な人は次の囲みの中の計算の長さだけを認識してもらえばよい。

$$
\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x}\,dxdy &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} \sqrt{x}\,dx\right) dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} dy \\
&= \frac{2}{3}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}\right)^{3/2} - \left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}\right)^{3/2}\right\} dy \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \left\{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}\right)^{3/2} - \left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}\right)^{3/2}\right\} dy \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^{3/2} - \left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^{3/2}\right\} \frac{\cos\theta}{2}d\theta \quad \left(y=\frac{\sin\theta}{2}\ \text{とおいた}\right)
\end{aligned}
$$

まだ，終わらないか?　縦型領域では 4 行で終わったぞ。

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^3 - \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^3\right\} \cos\theta\ d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\left(\frac{\cos\frac{3\theta}{2}}{4}+\frac{3\cos\frac{\theta}{2}}{4}\right) - \left(-\frac{\sin\frac{3\theta}{2}}{4}+\frac{3\sin\frac{\theta}{2}}{4}\right)\right\} \cos\theta\ d\theta
\end{aligned}
$$

まだ，終わらない？

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\frac{5\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right) + 3\left(\cos\frac{3\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\
&\qquad + \frac{1}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\frac{5\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right) - 3\left(\sin\frac{3\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta \quad (\because \text{和積の公式}) \\
&= \frac{1}{12}\left[\frac{2}{5}\sin\frac{5\theta}{2} + 2\sin\frac{3\theta}{2} + 8\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{12}\left[-\frac{2}{5}\cos\frac{5\theta}{2} + 2\cos\frac{3\theta}{2} - 8\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}
$$

やっと，終わった

同じ積分なのに D を縦線型領域で考えるか，横線型領域で考えるかでこんなにも計算量が違ってくる[*28]。

[*28] ものぐさで何もしないことの譬えに「横のものを縦にもしない」という言葉があるが，数学ではものぐさをしようと思ったら横のものを縦にしないといけないのである。

14.2　重積分の変数変換

変換

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

が領域 Ω を領域 D に写すとする (図 14.3 参照)。

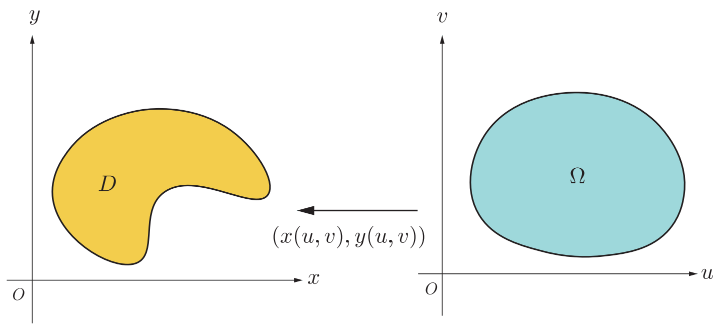

図 14.3

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{vmatrix} \tag{14.4}$$

とおくと，次が成り立つ。

$$\iint_D f(x, y)\ dxdy = \iint_\Omega f(x(u, v), y(u, v))|J(u, v)|\ dudv. \tag{14.5}$$

14.2.1　極座標

座標変換でよく使われるのは極座標変換である。例えば次の領域を考える (図 14.4 の左図)。

$$D = \{(x, y) : x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, r_1 \le r \le r_2, \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$$

変換

$$x = x(r, \theta) = r\cos\theta, \qquad y = y(r, \theta) = r\sin\theta \tag{14.6}$$

は

$$\Omega = \{(r, \theta) : r_1 \le r \le r_2, \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$$

を D に写す。

$$\begin{aligned} J(r, \theta) &= \begin{vmatrix} x_r(r, \theta) & x_\theta(r, \theta) \\ y_r(r, \theta) & y_\theta(r, \theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= \cos\theta(r\cos\theta) - \sin\theta(-r\sin\theta) \\ &= r. \end{aligned}$$

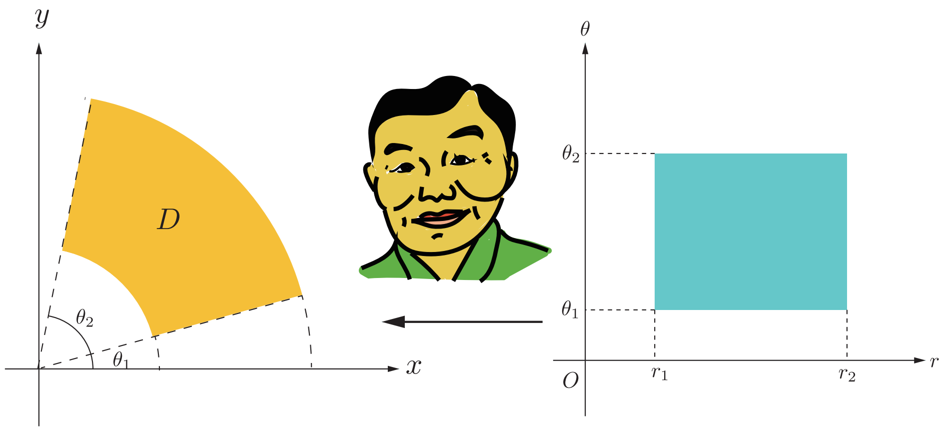

図 14.4　四角い仁鶴がまぁーるくおさめまっせ

したがって $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおくと

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{ \int_{r_1}^{r_2} g(r,\theta)\ rdr \right\} d\theta. \tag{14.7}$$

たとえば D が原点中心，半径 R の円板ならば

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{\pi} \left\{ \int_0^{R} g(r,\theta)\ rdr \right\} d\theta. \tag{14.8}$$

となる。

一般に θ を固定したとき，$r_1(\theta) \le r \le r_1(\theta)$ の範囲にあるとき，$(r\cos\theta, r\sin\theta)$ が D に含まれるとする (図 14.5 の赤い線分)。θ の範囲が $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ ならば

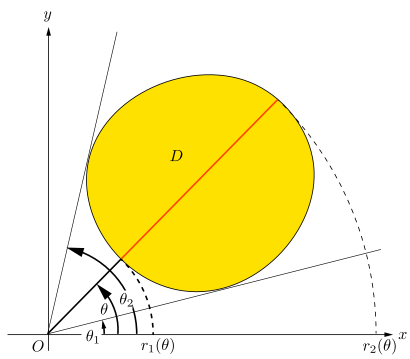

図 14.5

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{ \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} g(r,\theta)\ rdr \right\} d\theta. \tag{14.9}$$

例題 14.3　半径 R の球の体積 V を求める。

解答. $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le R^2\}$ とすると，

$$V = \iint_D (\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - (-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}))dxdy = 2\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy$$

極座標に変換して計算すると次のようになる[*29]。

$$V = 2\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} \cdot rdr \right) d\theta = 2\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} \cdot rdr$$
$$= 2 \cdot 2\pi \left[-\frac{1}{3}(R^2 - r^2)^{3/2} \right]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

例題 14.4　次の積分を求めよ。

$$\iint_D x\ dxdy, \quad D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le x\}.$$

解答. D は例題 14.2 と同じである：$x^2 + y^2 \le x$ を変形するととすると，

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 \le \frac{1}{4} \ \Rightarrow\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

よって D は中心 1/2, 半径 1/2 の円である。極座標に変換すると，$-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$. θ を固定すると r の範囲は $0 \le r \le \cos\theta$ (図 14.6 参照).

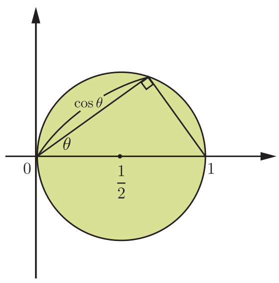

図 14.6

*29 私はこれを「身の上心配ある。参上」と習ったが，今もそうなのだろうか？

よって

$$\begin{aligned}\iint_D x\ dxdy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\cos\theta}(r\cos\theta)rdr\right)d\theta\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=\cos\theta}d\theta = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\ d\theta\\ &= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\ d\theta \qquad (\because \cos^4\theta \text{ は偶関数})\\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}. \qquad (\text{第 10 回参照})\end{aligned}$$

14.3　広義重積分

この講義の締めくくりとして次を示そう。

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{14.10}$$

ただし，積分の収束についての細かい議論には立ち入らない。

$$\begin{aligned}I^2 &= \int_0^{\infty} e^{-x^2}\ dx\cdot\int_0^{\infty} e^{-y^2}\ dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2}\ dxdy\\ &= \iint_D e^{-x^2-y^2}\ dxdy \quad (D = \{(x,y) : 0 \le x < \infty, 0 \le y < \infty\})\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\infty} e^{-r^2}rdr\right)d\theta \quad (\text{極座標に変換。図 14.7})\\ &= \lim_{c\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{c} e^{-r^2}rdr\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\cdot\left(\lim_{c\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^c\right)\\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

したがって (14.10) が成り立つ。

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{14.11}$$

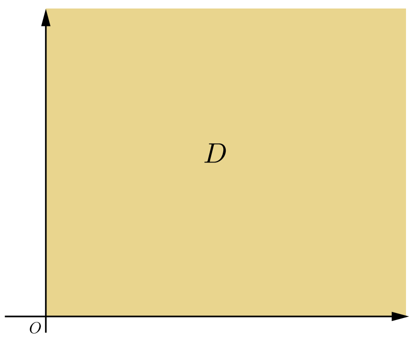

図 14.7

14.4 問題 (重積分)

問題 45　$D=\{(x,y):0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$ のとき，次の積分を計算せよ。

$$\iint_D (x^2y+xy^2)\ dxdy$$

解答.

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2y+xy^2)\ dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2y+xy^2)dy\right) dy\\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^2y^2}{2}+\frac{xy^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} dx\\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right) dx = \left[\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

問題 46　$D=\{(x,y):0\leq x\leq 1, x^3\leq y\leq x^2\}$ のとき，次の積分を計算せよ。

$$\iint_D y\ dxdy$$

解答.

$$\begin{aligned}\iint_D y\ dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} y\ dy\right) dx\\ &= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^3}^{y=x^2} dx\\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{2}\right) dx\\ &= \left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{10}-\frac{1}{14} = \frac{1}{35}.\end{aligned}$$

問題 47　$D=\{(x,y):x^2+y^2\leq 1, x+y\geq 1\}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　D を図示せよ。

(2)　次の積分を計算せよ。

$$\iint_D xy\ dxdy$$

解答. (1) は下図。

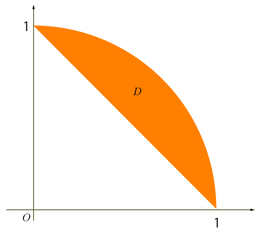

図 14.8　問題 47 の (1) の解答

(2)

$$\begin{aligned}\iint_D xy\ dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy\ dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \left(x^2 - x^3 \right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

問題 48　D を図の領域とするとき，次の積分を計算せよ。

$$\iint_D xy^2\ dxdy$$

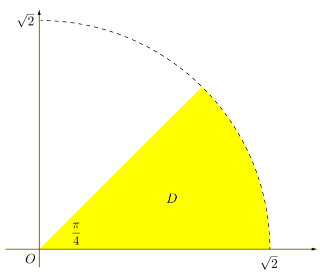

図 14.9　問題 48 の図

解答. 極座標を用いて

$$
\begin{aligned}
\iint_D xy^2\ dxdy &= \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\sqrt{2}} r\cos\theta (r\sin\theta)^2 r dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \sin^2\theta\cos\theta\ d\theta \cdot \int_0^{\sqrt{2}} r^4\ dr \\
&= \left[\frac{\sin^3\theta}{3} \right]_0^{\pi/4} \cdot \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{5} \\
&= \frac{2}{15}.
\end{aligned}
$$

図 14.10　おつかれ～