数学基礎IV（線形代数学) 講義ノート

2000 年後期 (担当：中西敏浩)

1　ベクトル空間

キーワード　ベクトル空間、一次独立・一次従属、基底、次元、部分ベクトル空間

1.1　ベクトル空間

1.1.1　ベクトル空間の公理

以下、K は $\mathbb{R}$(実数の集合) または $\mathbb{C}$(複素数の集合) を表わすものとする[1]。K の元をスカラーと呼ぶ。

集合 V が以下の条件をみたすとき、K 上のベクトル空間であるといい、その元をベクトルと称する。

(I) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in V$ に対して、V の元 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ が定義されて、以下の法則が成立する。

1.1　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$　(交換法則)

1.2　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$　(結合法則)

1.3　零ベクトルと呼ばれる特別な $\boldsymbol{0} \in V$ が存在して、任意の $\boldsymbol{a} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$$

1.4　任意の $\boldsymbol{a} \in V$ に対して, $-\boldsymbol{a}$ で表わされる V の元 ($\boldsymbol{a}$ の逆ベクトルという) が存在して

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$$

(II) $\boldsymbol{a} \in V, \alpha \in K$ に対して $\alpha\boldsymbol{a}$ が定義されて次の法則が成立する：$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ は V の元を、α,β は K の元を表わす。

[1] この授業では言及しないが、もちろん一般の (可換) 体としてよい。

2.1 $\alpha(\beta\boldsymbol{a}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{a}$	(結合法則)
2.2 $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$	(スカラーに関する分配法則)
2.3 $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$	(ベクトルに関する分配法則)
2.4 $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$	

零ベクトルの存在は一意的である: $\mathbf{0}$, $\mathbf{0}$' がともに零ベクトルだとすれば 1.1, 1.3 をもちいて

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}'$$

ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して、その逆ベクトルは一意的である: $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ がともに $\boldsymbol{a}$ の逆ベクトルだとすれば 1.2,1.3,1.4 をもちいて

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}.$$

(したがって、逆ベクトルを $-\boldsymbol{a}$ と表わすことができるのである。) 上の法則から、V のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して $0\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, $(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$ がしたがうから確かめること。$K = \mathbb{R}$ のときは V を実ベクトル空間、$K = \mathbb{C}$ のときは V を複素ベクトル空間という。

問題 1.1

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} : a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

とおく。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in V, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in V, \alpha \in \mathbb{R}$$

として、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との和を

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix},$$

スカラー積を

$$\alpha\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \alpha a_2 \end{pmatrix}$$

で定めるとき、V はベクトル空間にはならないことを示せ。

1.1.2　ベクトル空間の例

例 1.

$$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_1, a_2, ..., a_n \in K \right\}$$

は和とスカラー積を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix},\ (\alpha \in K)$$

で定めることによって、K 上のベクトル空間になる。$K = \mathbb{R}$ のとき n 次元実数ベクトル空間、$K = \mathbb{C}$ のとき n 次元複素数ベクトル空間と呼ぶ。(次元の定義 $\Rightarrow$ **1.3**)

例 2.

$$M_{mn}(K) = K \text{ を成分にもつ } (m, n) \text{ 行列全体}$$

は行列の和とスカラー積に関して K 上のベクトル空間となる。これらはベクトル空間としては K^{mn} と同型 (ベクトル空間の同型 $\Rightarrow$ **3.1**) であるが、(l, m) 行列 A を (m, n) 行列に左から乗じることが $M_{mn}(K)$ から $M_{ln}(K)$ への線形写像になること (線形写像 $\Rightarrow$ **3.1**) などを絡めると面白い問題が生じてくる。$M_{nn}(K)$ を単に $M_n(K)$ とかく。$M_n(K)$ のいろいろな部分ベクトル空間については **1.4** で取り上げる。

例 3. I を $\mathbb{R}$ の区間とする。(I は 開区間でも閉区間でもよい。また $(a, +\infty)$,$[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ あるいは $(-\infty, +\infty)$ の形でもよい。)

- $C^r(I) = I$ 上の 実数値 r 回連続微分可能の全体　$(r = 0, 1, ..., \infty)$
- $I = \mathbb{R}$ として $P(\mathbb{R}) =$ (変数 x についての) 実係数多項式の全体

これらは通常の関数の和、および実数倍によって実ベクトル空間である。後に示すようにこれらは無限次元ベクトル空間である。零ベクトル $\mathbf{0}$ は定義域上常に 0 の値をとる関数であることに注意する。

1.2 一次独立・一次従属

• ベクトル空間のベクトルたちが一次独立（あるいは一次従属）であるとはどういうことか。
• n 次元数ベクトル空間のベクトルたちが一次独立であるための判定法を知る。

K 上のベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_r$ について、方程式

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$$

を考える。ただし解 $\alpha_1, ..., \alpha_r$ は K の中で見つける。明らかに $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$ は一つの解であるが、これ以外に解が存在しないとき $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_r$ は <u>一次独立</u> であるという。そうでないときは <u>一次従属</u> であるという。

Proposition 1.2.1. V のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_r$ は一次独立とする。$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_r \in K$ に対して

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{a}_r = \beta_1 \boldsymbol{a}_1 + \beta_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \beta_r \boldsymbol{a}_r$$

ならば $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_r - \beta_r$ である。

Proof. 単に左辺を右辺に移項して、一次独立の定義をもう一度確認すればよい。

特に $V = K^n$ のとき

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_r \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.1}$$

と同じことを意味している。(1.2.1) に現れる (n, r) 行列を A とおくと、解が $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$ の一通りしかないための必要十分条件は $\mathrm{rank} A = r$ であった。したがって K^n において

ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_r$ が一次独立 $\Longleftrightarrow$ これらのベクトルをならべてできる行列の階数が r.

1.3 基底と次元

- 一次結合、基底、次元などの言葉を覚える。

V を K 上のベクトル空間とする。V の有限個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_r$ に対して

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_r\boldsymbol{a}_r$$

$(\alpha_i \in K)$ の形のベクトルは $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_r$ の <u>一次結合（線形結合）</u>で表わされるという。

Lemma 1.3.1. V のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_r$ は一次独立とする。もし $\boldsymbol{b} \in V$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_r$ の一次結合で表わせないならば、$\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,...,$\boldsymbol{a}_r$, $\boldsymbol{b}$ は一次独立である。

Proof. 一次独立の定義より

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r + x_{r+1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

をみたす $x_1, ..., x_{r+1} \in K$ は $x_1 = \cdots = x_{r+1} = 0$ しか存在しないことをいえばよい。
もし $x_{r+1} \neq 0$　ならば

$$\boldsymbol{b} = -x_{r+1}^{-1}x_1\boldsymbol{a}_1 - \cdots - x_{r+1}^{-1}x_r\boldsymbol{a}_r$$

となり、$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_r$ の一次結合で表わせないことに反する。よって $x_{n+1} = 0$. すると $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n$ が一次独立であることより、$x_1 = \cdots = x_n = 0$. □

V が <u>n 次元ベクトル空間</u>であるとは、次の条件が成立するときにいい、このとき $n = \dim V$ とかく。

- 一次独立な n 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n\}$ が存在する。
- $n+1$ 個のベクトルの組はすべて一次従属である。

もし V が無限個の一次独立なベクトルを含むとき、正確にいうと、どんな自然数 n に対しても n 個の一次独立なベクトルの組が存在するとき、V は <u>無限次元ベクトル空間</u> であるという。

注意（約束） この講義では断らないかぎり n 次元ベクトルというときは n は有限 (0 以上の整数) である、すなわち V は有限次元ベクトル空間であると約束する。

Lemma 1.3.1 より以下の結果が直ちにしたがう。ただし一次結合による表示の一意性は Proposition 1.2.1 による。

Proposition 1.3.2. n 次元ベクトル空間の一次独立な n 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n\}$ が与えられると、V のすべてのベクトルが、これらのベクトルの一次結合として 一意的に 表わすことができる。

n 次元ベクトル空間の n 個の一次独立なベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n\}$ は V の一つの 基底 であるという。

注意 フーリエ級数を習うと、

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, ..., \frac{\cos nx}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{2\pi}}, ...$$

は区間 $[-\pi,\pi]$ で正規直交系をなすということ知ったと思う。そして、たとえば区分的になめらかな連続関数はフーリエ級数で表わすことができるということを習ったと思う。こういう例をみると「無限個のベクトルからなる基底」という概念を導入してもよさそうだが、この線形代数の授業では「極限をとる操作」や「収束の意味」はまったく扱わないし、また K の任意の元を係数にもつ一次結合を考えるので、基底はあくまでも有限個のベクトルからなるものとする。

問題 1.2 (1) Vandermonde(ファンデルモンド) の行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

を示せ。(もし難しかったら $n = 3$ として

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$

を示せ。)
注. 佐武一郎著「線型代数学」(裳華房)、斎藤正彦著「線型代数入門」(東京大学出版会)に解答があるが、多変数多項式の剰余定理を用いた証明なので難しいかもしれない。
(2) $P(\mathbb{R})$ において (定義 $\Rightarrow$**1.1.2**) 関数の組 $\{1, x, x^2, ..., x^{n-1}\}$ $(n = 1, 2, ...)$ は一次独立であることを示せ。ただし 1 は $\mathbb{R}$ 上常に値 1 をとる関数を表わす。((1) で $n = 3$ の場合だけやった者は $\{1, x, x^2\}$ は一次独立であることを示せ)

1.4　部分ベクトル空間

V を K 上のベクトル空間とする。V の部分集合 W に対して次の条件がみたされるとき W は V の 部分ベクトル空間 という。

1.4.1　部分ベクトル空間の定義

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ ならば $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$,

(2) $\boldsymbol{a} \in W, \alpha \in K$ ならば $\alpha\boldsymbol{a} \in W$

W がベクトル空間の公理 **1.1.1** の条件をみたしていないと困るが、実際このことは V がベクトル空間であるということと、上の (1),(2) より従う。

1.4.2　部分ベクトル空間の例

例 1. V を K 上のベクトル空間として、有限個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ の線型結合全体

$$L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n) = \{\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{a}_n : \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K\}$$

は V の部分ベクトル空間.

例 2. $M_n(K)$ の部分ベクトル空間

- $SM_n(K) = n$ 次対称行列全体の集合
- $AM_n(K) = n$ 次交代行列全体の集合
- $UM_n(K) = n$ 次上三角行列全体の集合
- $LM_n(K) = n$ 次下三角行列全体の集合

これらはすべて $M_n(K)$ の部分ベクトル空間である。

問題 1.3. 複素ベクトル空間 $M_n(\mathbb{C})$ のエルミート行列全体のなす部分集合を H_n で表わす。H_n は $M_n(\mathbb{C})$ の部分ベクトル空間ではないことをしめせ。一方 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ の和を $A + B$ で $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して αA を行列のスカラー積で定めると $M_n(\mathbb{C})$ は実ベクトル空間とみることもできる。このときは H_n は $M_n(\mathbb{C})$ の部分ベクトル空間であることを示せ。

問題 1.4. W を ベクトル空間 V の部分ベクトル空間とするとき $\dim W \leq \dim V$ を示せ。

Theorem 1.4.1.(基底の延長)　W を n 次元ベクトル空間 V の部分ベクトル空間とする。$\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_r\}$ を W の基底とするとき、V のベクトル $\boldsymbol{e}_{r+1}, ..., \boldsymbol{e}_n$ を $\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r+1}, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ が V の基底となるように見つけることができる。

Proof. $n-r$ についての帰納法で示す。

$n-r=0$ のときは $V=W$ で $\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ が V の基底となる。

$n-r>0$ とする。もし $\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_r$ の一次結合で表わせない V のベクトル $\boldsymbol{f}$ が存在すると Lemma 1.3.1 より、$\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{f}$ は一次独立である。よって $\boldsymbol{e}_{r+1} = \boldsymbol{f}$ とおくと $L(\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_{r+1})$ ($\Rightarrow$**1.3.** 例 1) は $r+1$ 次元部分空間であり、$\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_{r+1}\}$ を基底にもつ。帰納法の仮定より V のベクトル $\boldsymbol{e}_{r+2}, ..., \boldsymbol{e}_n$ が見つかって、これらを付け加えて V の基底を得る。□

問題 1.5. $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$L(\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 21 \end{pmatrix})$$

の次元を求めよ。

$\boxed{\text{注意}}$ 3 つのベクトルの一次結合で表わされるからといって、3 次元とは限らない！

1.5 部分ベクトル空間の共通部分、和

- 部分空間の和集合と和空間との違いに注意すること。

V を K 上のベクトル空間, W_1, W_2 をその部分ベクトル空間とする。

★ W_1 と W_2 との共通部分 $W_1 \cap W_2$ は V の部分ベクトル空間 (確かめること！)
★ 一方 W_1 と W_2 との和（合併）部分 $W_1 \cup W_2$ は V の部分ベクトル空間とは限らない ($\Rightarrow$ 問題 1.8)。W_1 と W_2 を含む V の最小の部分ベクトル空間を W_1 と W_2 との <u>和空間</u> といい $W_1 + W_2$ で表わす。

$$W_1 + W_2 = \{\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v} : \boldsymbol{u} \in W_1, \boldsymbol{v} \in W_2, \alpha, \beta \in K\}$$

特に $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ のときは $W_1 + W_2 = W_1 \bigoplus W_2$ とかき、W_1 と W_2 との <u>直和</u> という。

Theorem 1.5. (次元定理)

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2.$$

問題 1.6. Theorem 1.5 を証明せよ。(ヒント: $r = \dim(W_1 \cap W_2), s = \dim W_1, t = \dim W_2$ とおく。そして $\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_r\}$ を $(W_1 \cap W_2)$ の基底とする。基底の延長 (Theorem 1.4) を用いると、W_1 の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{f}_{r+1}, ..., \boldsymbol{f}_s\}$ と W_2 の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{g}_{r+1}, ..., \boldsymbol{g}_t\}$ が見つかる。このとき $s + t - r$ 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{f}_{r+1}, ..., \boldsymbol{f}_s, \boldsymbol{g}_{r+1}, ..., \boldsymbol{g}_t\}$ が $W_1 + W_2$ の基底になることを示す。)

問題 1.7. $M_n(\mathbb{C}) = SM_n(\mathbb{C}) \bigoplus AM_n(\mathbb{C})$ を示せ。(記号は 1.4.1. 例 2 を見よ。)

1.6　章末問題 1

問題 1.8. $\mathbb{R}^4$ の部分ベクトル空間

$$W_1 = L(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}),\ W_2 = L(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix})$$

について $\dim W_1 \cap W_1, \dim W_1 + W_2$ を求めよ。

問題 1.9. (1) $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$W_1 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_2 = \left\{ \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

はそれぞれ $\mathbb{R}^2$ の部分ベクトル空間であることを示せ。
(2) W_1 と W_2 の和集合 $W_1 \cup W_2$ は $\mathbb{R}^2$ の部分ベクトル空間でないことを示せ。
(3) 和空間 $W_1 + W_2$ は $\mathbb{R}^2$ と一致することを示せ。

注意. 問題 1.9 は学生に配付した問題集には含まれていなかったが、和集合と (部分ベクトル空間の）和空間の違いがよく解らないとの学生からの質問があったので追加した。

2　計量ベクトル空間

キーワード　（ユークリッド）内積、エルミート内積、直交補空間、Gram-Schmidt の直交化法

2.1　実ベクトル空間上の内積

2.1.1　$\mathbb{R}^n$ 上のユークリッド内積

$\mathbb{R}^n$ の 2 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

に対して定まる量

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{2.1.1}$$

を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とのユークリッド内積といい、$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle}$ をベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さ(またはノルム)という。

ユークリッド内積のいくつかの性質を書き出してみる：

1. $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \geq 0$ かつ等号は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のときに限る。
2. $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle$
3. $\langle \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$
4. $\langle \alpha \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

これらの性質は、(2.1.1) の内積でなくても、例えば $c_1, c_2, ..., c_n > 0$ として

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = c_1 a_1 b_1 + c_2 a_2 b_2 + \cdots + c_n a_n b_n$$

と定めても成立する。

2.2　実ベクトル空間上の内積

V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする。V のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に対して実数 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ が定まって、上の 1. から 4. の性質が成り立つとき $\langle\ ,\ \rangle$ は V 上の一つの (ユークリッド) 内積であるという。上と同様 $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle}$ をベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さ(またはノルム) という。

例 1. r 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

に対して、その対角成分の和

$$\mathrm{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{rr}$$

を A の トレース と呼ぶ。

$M_{nm}(\mathbb{R})$ の元 A, B に対して

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}\, {}^t\! AB$$

は $M_{nm}(\mathbb{R})$ 上の内積を与える。

例 2. $I = [a, b]$ とし、$C(I) = C^0(I) (= I$ 上の連続関数全体) の 2 元 f, g に対して

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

は $C(I)$ 上の内積を与える。

例 3. V が 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつベクトル空間で、W を V の部分ベクトル空間とすると内積を W に制限することで W 上の内積を得る。

問題 2.1.(古典的) V は 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつ実ベクトル空間とする。V のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に対して
(1) $|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle| \leq \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\|$ (Schwartz(シュワルツ) の不等式)
(2) $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$ (三角不等式)
が成り立つことを示せ。

2.3　複素ベクトル空間上の内積（エルミート内積)

$\mathbb{C}^n$ の 2 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

に対して定まる量

$$\text{(2.2.1)} \qquad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = a_1\overline{b_1} + a_2\overline{b_2} + \cdots + a_n\overline{b_n} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}$$

を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との標準的な <u>エルミート内積</u> といい、$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle}$ をベクトル $\boldsymbol{a}$ の <u>長さ</u>(または <u>ノルム</u>) という。エルミート内積の性質をかきだすと

1. $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \geq 0$ かつ等号は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のときに限る。
2. $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle}$
3. $\langle \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$
4. $\langle \alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \quad (\alpha \in \mathbb{C})$

1 と 4 の条件より $\langle \boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b} \rangle = \overline{\alpha}\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ に注意すること。$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle$ が成立する（確かめよ！）一般の複素ベクトル空間 V に対して V の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ から複素数 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ への対応が、上の 1 から 4 をみたすとき、$\langle\ ,\ \rangle$ を V 上の一つの <u>エルミート内積</u> という。$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle}$ をベクトル $\boldsymbol{a}$ の <u>長さ</u>(または <u>ノルム</u>) という。

例 $M_{nm}(\mathbb{C})$ の元 A, B に対して

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}\, {}^tA\overline{B}$$

は $M_{nm}(\mathbb{C})$ 上のエルミート内積を与える。

ユークリッド内積（あるいはエルミート内積）をもつ実（あるいは複素）ベクトル空間を <u>計量ベクトル空間</u> という。

2.4 正規直交基底

（実あるいは複素) ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ が 直交系 であるとは

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle = 0 \quad (i \neq j \text{ のとき}) \tag{2.4.1}$$

をみたすときにいう。さらに 正規直交系 であるとは (2.4.1) に加え

$$\|\boldsymbol{e}_i\| = 1$$

をみたすときにいう。

n 次元ベクトル空間 V の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ が（正規）直交系であるとき、（正規）直交基底 であるという。V に一つの基底 $\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ が与えられているとき、V のベクトル $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n$ の一次結合

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_i\boldsymbol{e}_i + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n \tag{2.4.2}$$

で表わすには、一般には面倒な計算がともなうが（まあ現在はコンピュータがやってくれるからいいけど)、もし $\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ が正規直交基底ならば (2.4.2) の両辺と $\boldsymbol{e}_i$ との内積をとれば (複素ベクトル空間の場合は、 $\boldsymbol{e}_i$ は必ず内積記号内の右側に置くこと) $\alpha_i = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_i\rangle$、すなわち

$$\boldsymbol{a} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1\rangle\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_i\rangle\boldsymbol{e}_i + \cdots + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_n\rangle\boldsymbol{e}_n$$

となって (多分内積の計算は、連立方程式を解くより早くできるから) とても便利である。

問題 2.2. $C^0([-\pi, \pi])$ (⇒**1.2.2. 例 3**) において

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, ..., \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi}}, \cdots$$

は正規直交系をなす。ここで 1 は区間 $[-\pi, \pi]$ 上で常に値 1 をとる関数を表す。

2.5 直交補空間

V を実または複素ベクトル空間で、実ベクトル空間の場合はユークリッド内積、複素ベクトル空間の場合はエルミート内積をもつとする。V のベクトル $\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{b}$ に <u>直交する</u> とは $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$ となるときにいう。

W を V の部分集合とする。W のすべてのベクトルと直交する V のベクトル全体、すなわち

$$W^{\perp} = \{\boldsymbol{a} \in V : \text{任意の } \boldsymbol{b} \in W \text{ に対して } \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0\}$$

は V の部分ベクトル空間になる。（各自確かめること！）とくに W が部分ベクトル空間であるとき $W^{\perp}$ を W の <u>直交補空間</u> という。

問題 2.3. W, W_1, W_2 は 有限次元計量ベクトル空間 V の部分ベクトル空間とする。以下の式を証明せよ。
(1) $W = (W^{\perp})^{\perp}$
(2) $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$
(3) $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$

注意 V が無限次元ベクトル空間の場合は問題 2.3 の (1),(2) にある事実は一般には成立しない。

例 無限数列を元とする $l^2 = \{(a_1, a_2, ..., a_n, ...) : a_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty\}$ は 以下の和とスカラー積によって実ベクトル空間となる。

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n, ...), \quad \alpha \boldsymbol{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, ..., \alpha a_n, ...)$$

ただし $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, ..., b_n, ...)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. 内積を

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

で定めることにより計量ベクトル空間である。

$$W = \{\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n, ...); a_n \neq 0 \text{ となる } n \text{ は有限個しかない}\}$$

は l^2 の部分ベクトル空間である。$(1, 1/2, ..., 1/n, ...)$ は W に含まれない l^2 の元ゆえ、$W \neq l^2$. このとき $W^{\perp} = \{\boldsymbol{0}\}$ だけれども $(W^{\perp})^{\perp} = \{\boldsymbol{0}\}^{\perp}$ は l^2 であって W と等しくならない。

2.6 Gram-Schmidt の直交化法

- ベクトル空間の与えられた基底から正規直交基底をつくりだす方法を学ぶ。

V を n 次元計量ベクトル空間とする。V の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n\}$ から正規直交基底 $\{\boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{b}_n\}$ を次の手順でつくることができる。

(1) まず $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1/\|\boldsymbol{a}_1\|$ とおく。$\|\boldsymbol{b}_1\| = 1$ である。

(2.1) $\boldsymbol{b}_2^* = \boldsymbol{a}_2 - \langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1 \rangle \boldsymbol{b}_1$ とおく。これは書き直すと $\boldsymbol{b}_2^* = \boldsymbol{a}_2 - \langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1 \rangle \boldsymbol{a}_1/\|\boldsymbol{a}_1\|$ だから零ベクトルではない。$\boldsymbol{b}_2^*$ は $\boldsymbol{b}_1$ と直交する。

(2.2) $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b}_2^*/\|\boldsymbol{b}_2^*\|$ とおく。$\|\boldsymbol{b}_2\| = 1$ である。$\boldsymbol{b}_2$ は $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の一次結合でかけることに注意する。

$\vdots$ $\vdots$

(k-1) 正規直交系 $\{\boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{b}_{k-1}\}$ で、各ベクトルは $\{\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_{k-1}\}$ の一次結合でかけるものが得られたとする。

(k.1) $\boldsymbol{b}_k^* = \boldsymbol{a}_k - \langle \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1 \rangle \boldsymbol{b}_1 - \langle \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_2 \rangle \boldsymbol{b}_2 - \cdots - \langle \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_{k-1} \rangle \boldsymbol{b}_{k-1}$ とおく。これは $\{\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k\}$ の一次結合でかけ、かつ $\boldsymbol{a}_k$ の係数は 1 で 0 でないから零ベクトルではない。$\boldsymbol{b}_k^*$ は $\boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{b}_{k-1}$ と直交する。

(k.2) $\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{b}_k^*/\|\boldsymbol{b}_k^*\|$ とおく。$\|\boldsymbol{b}_k\| = 1$ である。$\boldsymbol{b}_k$ は $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k$ の一次結合でかけることに注意する。

$\vdots$ $\vdots$

(n) 以上の手続きを $k = n$ まで繰り返して完了！

注意 無限次元計量ベクトル空間の場合も、一次独立な無限個のベクトルが与えられたとき、上の方法を使って正規直交系をつくることができる。

問題 2.4. $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

から Gram-Schmidt の直交化法をもちいて正規直交基底をつくれ。

2.7　章末問題 2 ($*$ 付きは上級問題)

問題 2.5 (1) V を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつ実ベクトル空間で $\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ はその正規直交系とする。
(1) $\boldsymbol{f} \in V$ に対して

$$\|\boldsymbol{f} - x_1\boldsymbol{e}_1 - x_2\boldsymbol{e}_2 - \cdots - x_n\boldsymbol{e}_n\|$$

を最小とする実数 $x_1, x_2, ..., x_n$ の値を求めよ。
(2) $\boldsymbol{f} \in V$ に対して

$$\|\boldsymbol{f}\|^2 \geq |\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_1\rangle|^2 + \cdots + |\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_n\rangle|^2 \quad \text{(Bessel(ベッセル) の不等式)}$$

であること、さらに等号は

$$\boldsymbol{f} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_1\rangle \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_n\rangle \boldsymbol{e}_n$$

のときにかぎり成り立つことを示せ。

問題 2.6 $C([0,1])$ を区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数全体とし、これを実ベクトル空間と見なす。$\{1, x, x^2, x^3\}$ は $C([0,1])$ の一次独立なベクトルである (問題 1.3 参照)。$\{1, x, x^2, x^3\}$ から Gram-Schmidt の直交化法をもちいて正規直交系をつくれ。

問題 2.7$^{(*)}$. 問題 2.3 の (2) が成立しないようなベクトル空間 V とその部分ベクトル空間 W_1, W_2 の例を構成せよ。

問題 2.8. Gram-Schmidt の直交化法は、任意の複素 n 次正則行列 A に対してユニタリ行列 U と上三角行列 T が存在して $A = UT$ とかけることも意味している。もし A が実 n 次正則行列ならば U は直交行列、T は実上三角行列にとれる。行列

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を直交行列と上三角行列の積で表わせ。

3　線形写像

キーワード 線形写像、線形写像の像と核、同型、表現行列

3.1　線形写像の定義、線形写像が定める部分ベクトル空間

V, W を K 上のベクトル空間とする。（いつもと同様 K は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ であるとしている。）V の各ベクトル $\boldsymbol{a} \in V$ から W のベクトルへの対応 $\boldsymbol{b} = F(\boldsymbol{a}) \in W$ を写像といい、$F : V \to W$ とかく。

写像 $F : V \to W$ が、単射（１対１写像）であるとは $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in V$, $\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{a}_2$ ならば $F(\boldsymbol{a}_1) \neq F(\boldsymbol{a}_2)$ が成り立つときにいう。また F が、全射（上への写像）であるとは、任意の $\boldsymbol{b} \in W$ に対して $F(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$ となる、$\boldsymbol{a} \in V$ が存在するときにいう。全射かつ単射な写像は**全単射**であるという。

K 上のベクトル空間 V, W 間の写像 $F : V \to W$ が線形写像であるとは、次の条件が成立するときにいう。$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を V のベクトル、$\alpha \in K$ とするとき

(1) $F(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = F(\boldsymbol{a}) + F(\boldsymbol{b})$,

(2) $F(\alpha\boldsymbol{a}) = \alpha F(\boldsymbol{a})$.

これより $F(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, $F(-\boldsymbol{a}) = -F(\boldsymbol{a})$ が成立する。ただし、前者は V の零ベクトル、後者は W の零ベクトルである。

線形写像の例 $A = (a_{ij})$ を K を成分にもつ (n, m) 行列とする。

$$F_A\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

とおくと $F_A : K^m \to K^n$ は線形写像である。

$F : V \to W$ が線形写像であるときは、F が単射であることは次の補題によって判定することができる。

Lemma 3.1.1. $F : V \to W$ が線形写像であるとき、F が単射であるための必要十分条件は $F(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ となることである。

Proof. 必要条件は明らか。今「$F(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$」とする。$F(\boldsymbol{b}) = F(\boldsymbol{c})$ する。F は線形写像だから

$$F(\boldsymbol{b}) - F(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow F(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}.$$

仮定より $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$. よって $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ □

3.2 線形写像の核・像、次元定理

$F : V \to W$ を線形写像とする。V の部分ベクトル空間 V' と W の部分ベクトル空間 W' に対して

- $F^{-1}(W') = \{\boldsymbol{a} \in V : F(\boldsymbol{a}) \in W'\}$,
- $F(V') = \{\boldsymbol{b} \in W :$ ある $\boldsymbol{a} \in V'$ が存在して $F(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}\}$

はそれぞれ V および W の部分ベクトル空間である（確かめよ！）とくに $V' = V$ のとき、$W' = \{\mathbf{0}\}$ のとき

- $\mathrm{Ker}F = F^{-1}(\mathbf{0}) = \{\boldsymbol{a} \in V : F(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}\}$,
- $\mathrm{Im}F = F(V) = \{\boldsymbol{b} \in W :$ ある $\boldsymbol{a} \in V$ が存在して $F(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}\}$

$\mathrm{Ker}F$ を F の核 (kernel), $\mathrm{Im}F$ を F の像という。

Theorem 3.2.1.(次元定理) $F : V \to W$ を線形写像、V は n 次元ベクトル空間とすると

$$n = \dim \mathrm{Im}F + \dim \mathrm{Ker}F.$$

Proof. $r = \dim \mathrm{Ker}F$ とおく。$\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_r\}$ を $\mathrm{Ker}F$ の基底とする。この基底を延長して (⇒ Theorem 1.4.1)、V の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r+1}, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ をつくる。$F(\boldsymbol{e}_i) = \mathbf{0}$, $(i = 1, ..., r)$ なので $\mathrm{Im}F$ は $n - r$ 個のベクトル $F(\boldsymbol{e}_{r+1}), ..., F(\boldsymbol{e}_n)$ の一次結合全体となる。$F(\boldsymbol{e}_{r+1}), ..., F(\boldsymbol{e}_n)$ が一次独立であることを示す。

$$x_{r+1}F(\boldsymbol{e}_{r+1}) + \cdots + x_n F(\boldsymbol{e}_n) = \mathbf{0}.$$

ならば

$$F(x_{r+1}\boldsymbol{e}_{r+1} + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n) = \mathbf{0}.$$

より $x_{r+1}\boldsymbol{e}_{r+1} + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n \in \mathrm{Ker}F$. したがって $x_1, ..., x_r \in K$ が存在して

$$x_{r+1}\boldsymbol{e}_{r+1} + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n = x_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_r \boldsymbol{e}_r.$$

すなわち

$$x_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_r \boldsymbol{e}_r - x_{r+1}\boldsymbol{e}_{r+1} - \cdots - x_n \boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}.$$

ところが $\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n$ は一次独立ゆえ $x_{r+1} = \cdots = x_n = 0$. よって。$F(\boldsymbol{e}_{r+1}), ..., F(\boldsymbol{e}_n)$ は一次独立であり、$\mathrm{Im}F$ の基底をなす。したがって $\dim \mathrm{Im}F = n - r$ である。 □

3.3 ベクトル空間の同型

• 同じ次元をもつ有限次元ベクトル空間の間の線形写像については「単射性 $\Leftrightarrow$ 全射性」が成り立つ。

K 上のベクトル空間 V, W の間の全単射線型写像 $F: V \to W$ を <u>同型写像</u> という。

Proposition 3.3.1 V も W も n 次元ベクトル空間とする。線型写像 $F: V \to W$ は
(1) 単射ならば全射でもある。
(2) 全射ならば単射でもある。
したがって V から W への単射線形写像 (あるいは全射線形写像) が存在すれば V と W は同型である。

Proof. (1) $F : V \to W$ は単射とすると Lemma 3.1.1 より $\mathrm{Ker}F = \{\mathbf{0}\}$. すなわち $\dim \mathrm{Ker}F = 0$. 次元定理 (Theorem 3.2.1) より $\dim \mathrm{Im}F = n$. すなわち $\mathrm{Im}F$ は n 次元空間 W の n 次元部分空間だから $W = \mathrm{Im}F$.
(2) $F : V \to W$ は全射とすると $\mathrm{Im}F = W$. すなわち $\dim \mathrm{Im}F = n$ 次元定理より $\dim \mathrm{Ker}F = 0$. すなわち $\mathrm{Ker}F = \{\mathbf{0}\}$. Lemma 3.1.1 より F は単射。□

注意 V, W が無限次元ベクトル空間の場合はこの事実は一般には成立しない。たとえば l^2 を **2.5** のベクトル空間として $f: l^2 \to l^2$ を

$$f(a_1, a_2, ..., a_n.....) = (0, a_1, a_2, ..., a_n.....)$$

は単射線型写像であるが全射ではない。

K 上のベクトル空間 V, W の間に同型写像 $F: V \to W$ が存在すれば、V と W とは K 上のベクトル空間として <u>同型</u> であるという。

Proposition 3.3.2 K 上有限次元ベクトル空間 V と W が同型であるための必要十分条件は $\dim V = \dim W$.

Proof. (十分条件) $n = \dim V = \dim W$ とする。 V の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n\}$ と W の基底 $\{\boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{b}_n\}$ をとり、

$$F(x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n) = x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{b}_n,$$

$(x_1, ..., x_n \in K)$ と定めると F は同型写像となる。

問題 3.1. 証明の最後のところを確かめよ。さらに必要条件のほうを証明せよ。

3.4　表現行列

• K^n から K^m への線形写像は (m,n) 行列で表わされる。

• V を n 次元ベクトル空間、W を m 次元ベクトル空間、$F : V \to W$ は線形写像とする。Proposition 3.3.2 より V は K^n に、W は K^m に同型だから F は (m,n) 行列で表現される。

V, W を K 上の有限次元ベクトル空間で、$\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n\}$, $\{\boldsymbol{f}_1, ..., \boldsymbol{f}_m\}$ をそれぞれ V, W の基底とする。 $F : V \to W$ を線形写像とすると、各 $F(\boldsymbol{e}_j)$ は $\boldsymbol{f}_1, ..., \boldsymbol{f}_m$ の一次結合で表わされる:

$$F(\boldsymbol{e}_j) = a_{1j}\boldsymbol{f}_1 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{f}_m, \quad (j = 1, ..., n) \tag{3.4.1}$$

V のベクトル $\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n,$$

その像を

$$F(\boldsymbol{x}) = y_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + y_m\boldsymbol{f}_m$$

と表わすとき、$y_1, ..., y_m$ と $x_1, ..., x_n$ との関係を求める。(3.4.1) より

$$\sum_{i=1}^{m} y_i\boldsymbol{f}_i = F(\sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} x_iF(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_ja_{ij}\boldsymbol{f}_i$$

両辺の係数を比べて $y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ すなわち

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3.4.2}$$

ここで現われた (m,n) 行列を基底 $\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n\}$, $\{\boldsymbol{f}_1, ..., \boldsymbol{f}_m\}$ についての F の <u>表現行列</u> という。

3.5　表現行列の変換

3.4 節と同じ記号を用いる。 $\{\boldsymbol{e}_{\,1},...,\boldsymbol{e}_{\,n}\}$, $\{\boldsymbol{f}_{\,1},...,\boldsymbol{f}_{\,m}\}$ についての F の <u>表現行列</u> を $B=(b_{ij})$ とおく。ここで

$$\boldsymbol{e}_{\,j}=\sum_{k=1}^{n}p_{ki}\boldsymbol{e}_k,\quad \boldsymbol{f}_{\,i}=\sum_{l=1}^{m}q_{li}\boldsymbol{f}_l$$

ならば $\sum_{i=1}^{m}b_{ij}\boldsymbol{f}_{\,i}=F(\boldsymbol{e}_{\,j})$ にこれらを代入して

$$\sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}q_{li}b_{ij}\boldsymbol{f}_l=F(\sum_{k=1}^{n}p_{kj}\boldsymbol{e}_k)=\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{lk}p_{kj}\boldsymbol{f}_l.$$

両辺の係数を比較して

$$\sum_{i=1}^{m}q_{li}b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{lk}p_{kj}.$$

左辺は QB の (i,j) 成分、右辺は AP の (i,j) 成分、したがって

$$B=Q^{-1}AP. \tag{3.5.1}$$

という関係が成り立つ。

問題 3.2. K^n において $\{\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n\}$, $\{\boldsymbol{e}_{\,1},...,\boldsymbol{e}_{\,n}\}$ を 2 組の基底とし ($\boldsymbol{e}_i$,$\boldsymbol{e}_{\,i}$ は 縦ベクトルで表わされている)、これらを列にもつ n 次正方行列 $(\boldsymbol{e}_1\cdots\boldsymbol{e}_n)$, $(\boldsymbol{e}_{\,1}\cdots\boldsymbol{e}_{\,n})$ をつくる。このとき

$$\boldsymbol{e}_{\,j}=\sum_{k=1}^{n}p_{kj}\boldsymbol{e}_k$$

で定まる行列 $P=(p_{ki})$ は

$$(\boldsymbol{e}_{\,1}\cdots\boldsymbol{e}_{\,n})=(\boldsymbol{e}_1\cdots\boldsymbol{e}_n)P$$

をみたすことを証明せよ。

3.6　章末問題 3

問題 3.3. (1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ が定める線形写像 $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$F_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

の像 $\mathrm{ImF_A}$ と核 $\mathrm{Ker}F_A$ の次元を求めよ。

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{pmatrix}$ が定める線形写像 $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$F_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

の像 $\mathrm{ImF_A}$ と核 $\mathrm{Ker}F_A$ の次元を求めよ。

問題 3.4. $M_n(\mathbb{R})$ を n 次正方行列全体とし、内積を **2.2.** 例 1 のように与えて計量ベクトル空間とみる。I_n で n 次単位行列を表わす。
(1) A のトレース ($\Rightarrow$ **2.2.** 例 1) は $\mathrm{tr}A = \langle A, I_n \rangle$ で表わされることを示せ。
(2) 写像 $\mathrm{tr} : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ は線形写像である。任意の $A \in M_n(\mathbb{R})$ を $\mathrm{Ker\ tr}$ と $(\mathrm{Ker\ tr})^\perp$ の元の和で表わせ。

問題 3.5. $F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -3x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ で線形写像 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を定める。

$$\mathbb{R}^2 \text{ の基底 } \quad \{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

$$\mathbb{R}^3 \text{ の基底 } \quad \{\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ -17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\}$$

に関する表現行列を求めよ。

4　固有値と固有ベクトル

4.1　対角化ということ

- 行列が対角化可能とはどういうことか。
- 対角化可能でない行列があること。

$A \in M_n(\mathbb{C})$ を複素数を成分にもつ n 次正方行列とする。n 次正則行列 $P \in M_n(\mathbb{C})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{4.1.1}$$

となるとき、P は対角化可能であるという。

すべての正方行列が対角可能であるとかかぎらない。

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は対角化可能でない。

なぜなら、$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が存在して $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$ となったとする。両辺の左から P をかけて

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\mu & b\nu \\ c\mu & d\nu \end{pmatrix}$$

$c \neq 0$ ならば $c\mu = c$ より $\mu = 1$. すると $a + c = a\mu = a$ となり $c \neq 0$ に矛盾。よって $c = 0$. 同様にして $d = 0$ もいえる。すると $P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となり P が正則行列であることに矛盾する。

この章の目的は行列が対角化可能であるための条件を調べることである。

4.2　固有値と固有ベクトル、固有多項式

- 固有値と固有ベクトルという言葉をおぼえる。
- 固有値は固有多項式の根であること。

前節 (4.1.1) における P の第 i 列を $\boldsymbol{p}_i$ とおく：$P = (\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_i \cdots \boldsymbol{p}_n)$. すると (4.1.1) を書き直すと

$$(A\boldsymbol{p}_1 \cdots A\boldsymbol{p}_i \cdots A\boldsymbol{p}_n) = (\lambda_1 \boldsymbol{p}_1 \cdots \lambda_i \boldsymbol{p}_i \cdots \lambda_n \boldsymbol{p}_n). \tag{4.2.1}$$

すなわち $A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i$ が成り立っている。この性質に注目して固有値・固有ベクトルの定義をする。

$\lambda \in \mathbb{C}$ が A の <u>固有値</u> であるとは、零ベクトルでない n 次元数ベクトル $\boldsymbol{p} \in \mathbb{C}^n$ が存在して

$$A\boldsymbol{p} = \lambda \boldsymbol{p} \tag{4.2.2}$$

が成り立つときにいう。(4.2.2) をみたすベクトル (ここでは零ベクトルも含める)　$\boldsymbol{p}$ を λ の <u>固有ベクトル</u> であるという。

すべての複素数が A の固有ベクトルにあるとはかぎらない。I を n 次単位行列とすると (4.2.2) は $(\lambda I - A)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$. したがって $(\lambda I - A)$ は正則写像ではありえない。すなわち $\det(\lambda I - A) = 0$. 変数 x の n 次多項式 $\phi_A(x) = \det(xI - A)$ を A の <u>固有方程式</u> という。A の固有値はこの固有方程式の根である。逆に λ が $\phi_A(\lambda) = 0$ をみたせば、$\lambda I - A$ の階数は n より小さいから、$(\lambda I - A)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ がみつかる。まとめると

Theorem 4.2.1 $\lambda \in \mathbb{C}$ が A の <u>固有値</u> であるための必要十分条件は λ が A の固有方程式 ϕ_A の根であること。したがって A の固有値は高々 n 個しか存在しない。

P は正則行列ゆえ、 P の第 i 列 $\boldsymbol{p}_i$ をベクトルとみなすと、$\boldsymbol{p}_1, ..., \boldsymbol{p}_n$ は一次独立である。逆に A の一次独立な n 個の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, ..., \boldsymbol{p}_n$ が存在すれば、これらを並べてできる行列 $P = (\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_n)$ をもちいて A を対角化できる。したがって

Lemma 4.2.2 n 次正方行列 A が対角化できるための必要十分条件は A の固有ベクトルからなる $\mathbf{C}^n$ の基底が存在することである。

問題 4.1 行列

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

とし、A の固有値を求めよ。

4.3　固有ベクトル空間

$A \in M_n(\mathbb{C})$ の固有値 λ に対する固有ベクトル全体

$$W(\lambda) = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n : A\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a}\}$$

は $\mathbb{C}^n$ の部分ベクトル空間になる（確かめよ。）これを固有値 λ に対する A の固有ベクトル空間という。

もし $\boldsymbol{a} \in W(\lambda)$ ならば $A(A\boldsymbol{a}) = A(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda A\boldsymbol{a}$ だから $A\boldsymbol{a}$ も λ の固有ベクトル。したがって

$$A(W(\lambda)) \subset W(\lambda). \tag{4.3.1}$$

（実際は A の定める線形写像 F_A をもちいて $F_A(W(\lambda)) \subset W(\lambda)$ とかくべきところであるが、面倒なので上のように記した。）

Lemma 4.3.1. $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ を A の相異なる固有値とする。$\boldsymbol{a}_1 \in W(\lambda_1)$, $\boldsymbol{a}_2 \in W(\lambda_2)$,..., $\boldsymbol{a}_r \in W(\lambda_r)$ が $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_r = \mathbf{O}$ をみたすとき $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 = \cdots = \boldsymbol{a}_r = \mathbf{O}$.

Proof. r に関する帰納法をもちいる。$r = 1$ のときは何も証明することはない。今 $r-1$ 個の固有値に対して定理の主張が成立していると仮定する。次に

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_r = \mathbf{0} \tag{4.3.2}$$

とすると

$$-\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_r. \tag{4.3.3}$$

$\boldsymbol{a}_1 \in W(\lambda_1)$ と $\boldsymbol{a}_i \in W(\lambda_i)$, $(i = 2, ..., r)$ より、A を (4.3.3) に左から乗じると２つの表示

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_1 \boldsymbol{a}_r = \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{a}_r.$$

が可能である。２式の差をとって

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\boldsymbol{a}_2 + \cdots + (\lambda_r - \lambda_1)\boldsymbol{a}_r = \mathbf{0}.$$

帰納法の仮定より $(\lambda_2 - \lambda_1)\boldsymbol{a}_2 = \cdots = (\lambda_r - \lambda_1)\boldsymbol{a}_r = \mathbf{O}$. $\lambda_i \neq \lambda_1$ $(i = 2, ..., r)$ ゆえ $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 = \cdots = \boldsymbol{a}_r = \mathbf{O}$.□

$n_i = \dim W(\lambda_i)$ の基底 $\{\boldsymbol{p}_{i1}, ..., \boldsymbol{p}_{in_i}\}$ を任意に１つ選ぶ。するとこれらをあつめた

$$\{\boldsymbol{p}_{11}, ..., \boldsymbol{p}_{1n_1}, ..., \boldsymbol{p}_{r1}, ..., \boldsymbol{p}_{rn_r}\}$$

は上の Lemma より一次独立である。Lemma 4.2.2 より A が対角化可能であるためには、これが基底をなさなければいけない。したがって

Theorem 4.3.2. A が対角化可能であるため必要十分条件は

$$n = \dim W(\lambda_1) + \cdots + \dim W(\lambda_r).$$

とくに A が相異なる n 個の固有値をもてば対角化可能である。

問題 4.2. 前問と同じ行列

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有ベクトル空間を求めよ。A が対角化可能かどうかを判定せよ。

4.4 エルミート行列の対角化

- エルミート行列の固有値は実数であること。
- エルミート行列は対角化可能であること。

4.4.1 エルミート行列の固有値・固有ベクトル

A を n 次正方行列、$\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathbb{C}^n$ のエルミート内積とする。 $\mathbb{C}^n$ の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に対して

$$\langle \boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}\rangle = {}^t\boldsymbol{a}\overline{A\boldsymbol{b}} = {}^t({}^t\overline{A}\boldsymbol{a})\overline{\boldsymbol{b}} = \langle A^*\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle.$$

(A^* は A の随伴行列) とくに A がエルミート行列（したがって実対称行列）ならば

$$\langle \boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}\rangle = \langle A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle. \tag{4.4.1}$$

いま λ, μ を A の固有値とする。$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ をそれぞれ λ, μ に対する固有ベクトルとすると (4.1.1) より

$$\lambda\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \overline{\mu}\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle. \tag{4.4.2}$$

とくに $\lambda = \mu$ のとき $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ かつこれを零ベクトルでないようにとれば $\lambda\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle = \overline{\lambda}\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle$ となり、λ は実数であることがわかる。

エルミート行列の固有値は実数である。

このことにより (4.4.2) は実際には

$$\lambda\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \mu\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \tag{4.4.2$'$}$$

とかける。次に $\boldsymbol{a}$ を固有値 λ に対する固有ベクトルとし、$\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$ に直交するベクトルとする。このとき (4.4.1) より

$$\langle \boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}\rangle = \langle A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \lambda\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = 0.$$

すなわち

ベクトル $\boldsymbol{b}$ がエルミート行列 A の固有ベクトル $\boldsymbol{a}$ に直交すれば $A\boldsymbol{b}$ も $\boldsymbol{a}$ に直交する。

4.4.2 エルミート行列の対角化

エルミート行列は対角化可能である。

Theorem 4.4.1. A がエルミート (実対称) 行列ならば、ユニタリ (直交) 行列 U が存在して U^*AU は対角行列になる。

Proof. A を n 次正則行列として、n についての帰納法で示す。$n=1$ のときは何も示すことはないので $n>1$ とする。λ_1 を A の一つの固有値とし、$\boldsymbol{a}_1$ をその長さ 1 の固有ベクトルとする。ただし A が実行列のときは実ベクトルとして選ぶ。以下例を交えながら話を進める。

例. 実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して U^*AU が対角行列になるような直交行列 U を求めよ。

A の固有多項式は

$$\begin{vmatrix} x-3 & -1 & -1 \\ -1 & x-3 & -1 \\ -1 & -1 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & -1 \\ -1 & x-3 & -1 \\ 0 & -x+2 & x-2 \end{vmatrix}$$

(3 行目から 2 行目を引いた。) 3 行目から 2 が固有値であることが分かる。これに対する固有ベクトルを求めると

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+y+z=0.$$

よって

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は一つの固有値 2 に対する長さ 1 の固有ベクトル。

証明の続き $L(\boldsymbol{a}_1)$ の直交補空間 W の正規直交基底 $\{\boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n\}$ を一組選ぶ。ただし A が実行列のときは実ベクトルとして選ぶ。上で示したように $\boldsymbol{a} \in W$ ならば $A\boldsymbol{a} \in W$ である。よって $i = 2, ..., n$ に対して $A\boldsymbol{a}_i$ は $\boldsymbol{a}_2$,...,$\boldsymbol{a}_n$ の一次結合で書ける:

$$A\boldsymbol{a}_i = a_{2i}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + a_{ni}\boldsymbol{a}_n.$$

となる $a_{2i}, ..., a_{ni} \in \mathbb{C}$ が存在する。ただし A が実行列のときは実数として選ぶ。すると $P = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)$ をベクトル $\boldsymbol{a}_j$ を第 j 列にもつ行列とすると、P はユニタリ行列（実の場合は直交行列）となり

$$P^*AP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

例の計算 (続き)

$$L(\boldsymbol{a}_1) = L(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

の直交補空間は

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 1\bar{x} + (-1)\bar{y} + 0\bar{z} = 0 \right\}$$

であり、この正規直交基底として例えば

$$\boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる。

$$P = (\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \boldsymbol{a}_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は直交行列で

$${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

証明の続き.

$$B = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$P^*AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & O_{1n-1} \\ O_{n-11} & B \end{pmatrix}$$

はエルミート行列なので、B も $(n-1)$ 次のエルミート行列であり、帰納法の仮定より、$(n-1)$ 次のユニタリ行列 Q が存在して

$$Q^*BQ = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

の形となる。よって

$$U = \begin{pmatrix} 1 & O_{1n-1} \\ O_{n-11} & Q \end{pmatrix} P$$

とおけば U はユニタリ行列で

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

例の計算 (続)

$$B = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

とおくと、B の固有値は $2, 5$ で、それらの固有値として

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

が選べる。このとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

したがって

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

4.5 実二次形式の標準形

n 個の変数 $x_1, ..., x_n$ に関する斉次2次式

$$\sum_i^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} a'_{ij}x_ix_j$$

を <u>2次形式</u> という。$a_{ij} = a'_{ij}/2$ $(i > j$ のとき) とおけば、この式は

$$\sum_i^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij}x_ix_j = (x_1, x_2, ..., x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{4.5.1}$$

ここで現われた行列を A とおく。A は対称行列。　もしすべての a_{ij} が実数ならば、上の定理より直交行列 U が存在して ${}^tUAU$ は対角行列になる。 そこで

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

による変数変換を行なえば

$$(x_1, x_2, ..., x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (y_1, y_2, ..., y_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

すなわち次式の左辺にある <u>2次形式の標準形</u> を得る。

$$\sum_i^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij}x_ix_j = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

4.6　章末問題 4

問題 4.3. 次の行列を Theorem 4.5.1 にあるように対角化する。直交行列と対角行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

問題 4.4. (1) 次の実 2 次形式の標準形を求めよ。

$$xy + yz + zx.$$

(2) $xy + yz + zx = 1$ で表わされる曲面を (x, y, z) 空間に描くこと。

問題 4.5. (1) 実 2 次対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

の固有値が 2 つとも正であるための必要十分条件は $a > 0$ かつ $\det A > 0$ であることを証明せよ。
(2) A の固有値が 2 つとも負であるための必要十分条件は $a < 0$ かつ $\det A > 0$ であることを証明せよ。

問題 4.6. (古典的) $a_0 = a_1 = 1$ かつ帰納的に

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

で定まる数列 (Fibonacci 数列) の一般項 a_n を求めよ。(ヒント:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

であるから、ここに現われる 2 次正方行列を A としたとき、A の n 乗を求めることを考えよ。そのために $A = P^{-1}DP$ (D は対角行列) の形に分解せよ。

演習問題の解答

問題 1.1 の解答

$$(\alpha+\beta)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ (\alpha+\beta)a_2 \end{pmatrix}$$

一方

$$\alpha\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \alpha a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \beta a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ (\alpha+\beta)a_2 \end{pmatrix}$$

したがって $a_1 \neq 0$ のときは $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$ をみたさない。よって V はベクトル空間ではない。

注意 公理系のうち (2.2) 以外はすべて成立する。

問題 1.2 の解答 (2) 考え方は同じなので $n=2$ の場合を扱う。$a_1 1 + a_2 x + a_3 x^2 = 0$ であったとする。x_1, x_2, x_3 を相異なる実数として、x にこれらを代入すると

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) よりここであらわれた行列は正則行列ゆえ、$a_1 = a_2 = a_3 = 0.$ したがって $1, x, x^2$ は一次独立である。

問題 1.3 の解答. n 次正方行列 A、B および複素数 α に対して

$$(A+B)^* = A^* + B^*, \qquad (\alpha A)^* = \overline{\alpha}A^*.$$

が成り立つ。さて $A, B \in H_n$ とすると $(A+B)^* = A^* + B^* = A + B$ なので和については $A + B \in H_n$ がいえる。しかし $A \in H_n$ を O でないとし、α を純虚数とすると $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}A^* = -\alpha A$ となり αA はエルミート行列でない。したがって H_n は複素ベクトル空間ではない。しかし α を実数とすると $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}A^* = \alpha A$ ゆえ αA はエルミート行列。したがって H_n は実ベクトル空間 $M_n(\mathbb{C})$ の部分ベクトル空間である。

問題 1.4 の解答. $m = \dim W$ とすると m 個の一次独立な W のベクトルが存在する。これらは V でも一次独立なベクトルである。ベクトル空間の次元は一次独立なベクトルの組が含むベクトルの個数の最大値だったから $\dim W \leq \dim V$.

問題 1.5 の解答.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 21 \end{pmatrix}$$

とおく。これらをならべてできる行列に列基本変形を次のように行なう。

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 8 & -4 & 4 \\ 3 & 5 & 21 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & 36 \\ 3 & 11 & 33 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & 0 \\ 3 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

ただし最初の変形は2列に1列の2倍を、3列に1列の4倍を加えたもので、次の変形は3列に2列の(-3)倍を加えたものである。最後の行列の階数は2なので部分空間 $\dim L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = 2.$ ちなみに上の列基本変形より $\boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_3$ がわかる。

問題 1.6 の解答. $r = \dim(W_1 \cap W_2), s = \dim W_1, t = \dim W_2$ とおく。そして $\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_r\}$ を $(W_1 \cap W_2)$ の基底とする。基底の延長 (Theorem 1.4) を用いると、W_1 の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{f}_{r+1}, ..., \boldsymbol{f}_s\}$ と W_2 の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{g}_{r+1}, ..., \boldsymbol{g}_t\}$ が見つかる。このとき $W_1 + W_2$ のすべてのベクトルが $s + t - r$ 個のベクトル $\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{f}_{r+1}, ..., \boldsymbol{f}_s, \boldsymbol{g}_{r+1}, ..., \boldsymbol{g}_t$ の一次結合でかけるから、後はこれらが一次独立であることをしめせば、$\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{f}_{r+1}, ..., \boldsymbol{f}_s, \boldsymbol{g}_{r+1}, ..., \boldsymbol{g}_t\}$ は $W_1 + W_2$ の基底になり $\dim(W_1 + W_2) = s + t - r$ がわかる。

そこで

$$(1) \qquad x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{e}_r + x_{r+1}\boldsymbol{f}_{r+1} + \cdots + x_s\boldsymbol{f}_s + y_{r+1}\boldsymbol{g}_{r+1} + \cdots + y_t\boldsymbol{g}_t = \boldsymbol{0}$$

とする。これから

$$x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{e}_r + x_{r+1}\boldsymbol{f}_{r+1} + \cdots + x_s\boldsymbol{f}_s = -y_{r+1}\boldsymbol{g}_{r+1} - \cdots - y_t\boldsymbol{g}_t \in W_1 \cap W_2$$

ゆえ $z_1, ..., z_r \in K$ が存在して

$$\begin{aligned} z_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + z_r\boldsymbol{e}_r &= x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{e}_r + x_{r+1}\boldsymbol{f}_{r+1} + \cdots + x_s\boldsymbol{f}_s \\ z_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + z_r\boldsymbol{e}_r &= -y_{r+1}\boldsymbol{g}_{r+1} - \cdots - y_t\boldsymbol{g}_t \end{aligned}$$

これらは次のように書き直せる。

$$\begin{aligned} (x_1 - z_1)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (x_r - z_r)\boldsymbol{e}_r + x_{r+1}\boldsymbol{f}_{r+1} + \cdots + x_s\boldsymbol{f}_s &= \boldsymbol{0} \\ z_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + z_r\boldsymbol{e}_r + y_{r+1}\boldsymbol{g}_{r+1} + \cdots + y_t\boldsymbol{g}_t &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{f}_{r+1}, ..., \boldsymbol{f}_s$, $\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{g}_{r+1}, ..., \boldsymbol{g}_t$ はそれぞれ一次独立なので $x_{r+1} = \cdots = x_s = 0$, $z_1 = \cdots = z_r = y_{r+1} = \cdots = y_t = 0.$ これを上の最初の式に代入すると $x_1 = \cdots = x_r = 0.$ したがって $\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{f}_{r+1}, ..., \boldsymbol{f}_s, \boldsymbol{g}_{r+1}, ..., \boldsymbol{g}_t$ は一次独立であり、$W_1 + W_2$ の基底をなす。

$$\dim(W_1 + W_2) = s + t - r = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

問題 1.7 の解答. $A = M_n(\mathbb{C})$ とする。

$$A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

と表示すれば $\frac{1}{2}(A + {}^tA) \in SM_n(\mathbb{C})$, $\frac{1}{2}(A - {}^tA) \in AM_n(\mathbb{C})$. したがって $M_n(\mathbb{C}) = SM_n(\mathbb{C}) + AM_n(\mathbb{C})$. 今 $A \in SM_n(\mathbb{C}) \cap AM_n(\mathbb{C})$ とすると $A = {}^tA, A = -{}^tA$ ゆえ $A = O$. したがって $SM_n(\mathbb{C}) \cap AM_n(\mathbb{C}) = \{O\}$ であり　$M_n(\mathbb{C}) = SM_n(\mathbb{C}) \bigoplus AM_n(\mathbb{C})$.

問題 1.8 の解答. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$ ゆえ

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

は一次独立。よって $\dim W_1 = 2$. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -69 \neq 0$ ゆえ

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

は一次独立。よって $\dim W_2 = 3$. 一方

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{に行基本変形をおこなって} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で、この行列の階数は 4. したがって $\dim W_1 + W_2 = 4$. 次元定理より $\dim W_1 \cap W_2 = 1$. またこの基本変形後の行列の形より $W_1 \cap W_2$ は

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

で張られることが分かる。

問題 1.9 の解答. (1) W_1 は第 2 成分が 0 となるベクトルの集合、W_2 は第 1 成分が 0 となるベクトルの集合で、これらは和とスカラー積について閉じているから $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間となる。
(2) 和集合 $W_1 \cup W_2$ は第 1 成分および第 2 成分の少なくともどちらか一方が 0 となるベクトルの集合であるので

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_2$$

とすると

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W_1 \cup W_2.$$

したがって $W_1 \cup W_2$ はベクトル空間ではない。
$x, y \in \mathbb{R}$ を任意の実数とする。$W_1 + W_2$ は W_1 と W_2 を含む（最小の）ベクトル空間だから

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in W_2$$

の和

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W_1 + W_2.$$

すなわち W_1+W_2 は $\mathbb{R}^2$ のすべてのベクトルを含んでいないといけない。したがって W_1+W_2 と $\mathbb{R}^2$ は一致する。

問題 2.1 の解答 (1) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のときは明らかに等式が成り立つから $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ とする。x を実数とする。

$$\langle x\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, x\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \rangle = x^2 \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2x\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \|\boldsymbol{b}\|^2$$

を x の二次関数と見なすと、つねに非負の値をとるから、その判別式

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2 - \|\boldsymbol{a}\|^2 \|\boldsymbol{b}\|^2 \leq 0$$

これは (1) の不等式に等しい。
(2) (1) の結果より $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \|\boldsymbol{b}\|^2 \leq \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| + \|\boldsymbol{b}\|^2 \leq (\|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|)^2.$

問題 2.2 の解答 $n = 1, 2, ...$ に対して

$$\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} = 1, \langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{\sqrt{2}\pi} dx = 0, \langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{\sqrt{2}\pi} dx = 0.$$

$$\langle\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 nx}{\pi}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)dx=\frac{1}{2\pi}\left[x+\frac{1}{2n}\sin 2nx\right]_{-\pi}^{\pi}=1.$$
$$\langle\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 nx}{\pi}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)dx=\frac{1}{2\pi}\left[x-\frac{1}{2n}\sin 2nx\right]_{-\pi}^{\pi}=1.$$
$n\neq m$ のとき
$$\begin{aligned}\langle\frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos mx\cos nx}{\pi}dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x)dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n+m}\sin(m+n)x+\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi}=0.\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\langle\frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin mx\sin nx}{\pi}dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-\cos(m+n)x+\cos(m-n)x)dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n+m}\sin(m+n)x+\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi}=0.\end{aligned}$$
また $n,m=1,.2,...$ に対して
$$\begin{aligned}\langle\frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin mx\cos nx}{\pi}dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x)dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n+m}\cos(m+n)x-\frac{1}{m-n}\cos(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi}=0.\end{aligned}$$
(ただし $n=m$ のときは $\sin(n-m)x=0$ として 3 行目以降の計算を続ける。)

問題 2.3 の解答 計量ベクトル空間 V の部分集合 A, B に対して $A\subset B$ ならば定義より直ちに $B^{\perp}\subset A^{\perp}$ であることに注意する。

(1) V の次元を n とする。W の一つの正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_r\}$ を選ぶ。任意の V のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し $\boldsymbol{b}=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_1\rangle\boldsymbol{e}_1+\cdots+\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_r\rangle\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ とおくと $\boldsymbol{b}\in W$, $\boldsymbol{c}\in W^{\perp}$ がわかるから $\boldsymbol{a}\in W+W^{\perp}$. すなわち $V=W+W^{\perp}$.　次に $\boldsymbol{a}\in W\cap W^{\perp}$ とすると $\boldsymbol{a}$ は自分自身と直交する、すなわち $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle=0$ ゆえ $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. したがって $W\cap W^{\perp}=\{\boldsymbol{0}\}$. すなわち V は W と $W^{\perp}$ の直和であり、次元定理から $\dim W^{\perp}=\dim V-\dim W=n-r$.

定義からただちに $W\subset(W^{\perp})^{\perp}$ がしたがう(このことには有限次元の仮定はいらない。)$W=(W^{\perp})^{\perp}$ を示すには $\dim(W^{\perp})^{\perp}=r$ をいえばよい。上で示したことから

$$\dim(W^{\perp})^{\perp}=n-\dim W^{\perp}=n-(n-r)=r.$$

したがって W も $(W^\perp)^\perp$ も r 次元であり、$W=(W^\perp)^\perp$.

まず (3) を示す。$W_i \subset W_1+W_2$ より $(W_1+W_2)^\perp \subset W_i^\perp (i=1,2)$. したがって $(W_1+W_2)^\perp \subset W_1^\perp \cap W_2^\perp$. $\boldsymbol{a}$ を $W_1^\perp \cap W_2^\perp$ の任意のベクトルとする。W_1+W_2 の任意のベクトルは $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$ $(\boldsymbol{b}_1 \in W_1, \boldsymbol{b}_2 \in W_2)$ の形で表わされ

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2\rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1\rangle + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_2\rangle = 0.$$

したがって $\boldsymbol{a} \in (W_1+W_2)^\perp$ すなわち $W_1^\perp \cap W_2^\perp \subset (W_1+W_2)^\perp$. 以上から $W_1^\perp \cap W_2^\perp = (W_1+W_2)^\perp$.

(2) は (1) と (3) をもちいて示す。 $W_1^\perp, W_2^\perp$ に (1), (3) を適用して

$$(W_1 \cap W_2 =)(W_1^\perp)^\perp \cap (W_2^\perp)^\perp = (W_1^\perp + W_2^\perp)^\perp.$$

両者の直交補空間をとって $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

問題 2.4, 2.8 の解答

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおく。Gram-Schmidt の直交化法にしたがって正規直交基底をつくる。$\|\boldsymbol{a}_1\| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$. よって

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

次に $\langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1\rangle = (1/\sqrt{6})(1\times 2 + 2\times 1 + 1\times 1) = 5/\sqrt{6}$.

$$\boldsymbol{b}_2^* = \boldsymbol{a}_2 - \langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1\rangle \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} -4/6 \\ 7/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}.$$

$\|\boldsymbol{b}_2^*\| = \sqrt{(-4)^2+7^2+1^2}/6 = \sqrt{11/6}$. ゆえ

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_1^*\|}\boldsymbol{b}_2^* = \begin{pmatrix} -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \\ 1/\sqrt{66} \end{pmatrix}.$$

次に $\langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1\rangle = (1/\sqrt{6})(1\times2+1\times1+2\times1) = 5/\sqrt{6}$, $\langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2\rangle = (1/\sqrt{66})(-4\times1+7\times1+1\times2) = 5/\sqrt{66}$. よって

$$\boldsymbol{b}_3^* = \boldsymbol{a}_3 - \langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1\rangle \boldsymbol{b}_1 - \langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2\rangle \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -4/11 \\ -4/11 \\ 12/11 \end{pmatrix}.$$

$\|\boldsymbol{b}_3^*\| = (4/11)\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+3^2} = 4/\sqrt{11}$. ゆえ

$$\boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}_3^*\|}\boldsymbol{b}_3^* = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{11} \\ -1/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{11} \end{pmatrix}.$$

ところで $\boldsymbol{b}_1 = (1/\|\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_2 = (1/\|\boldsymbol{b}_1^*\|)(\boldsymbol{a}_2 - \langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1\rangle \boldsymbol{b}_1)$, $\boldsymbol{b}_3 = (1/\|\boldsymbol{b}_3^*\|)(\boldsymbol{a}_3 - \langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1\rangle \boldsymbol{b}_1 - \langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2\rangle \boldsymbol{b}_2)$ から

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 &= -5\sqrt{66}\boldsymbol{a}_1 + \sqrt{\frac{6}{11}}\boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 &= \frac{-5}{4\sqrt{11}}\boldsymbol{a}_1 + \frac{-5}{4\sqrt{11}}\boldsymbol{a}_2 + \frac{11}{4\sqrt{11}}\boldsymbol{a}_3 \end{aligned}$$

A を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ をならべてできる行列、B を $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ をならべてできる行列とする。すなわち

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & -4/\sqrt{66} & -1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{6} & 7/\sqrt{66} & -1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{66} & 3/\sqrt{11} \end{pmatrix}.$$

上の式より

$$\begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & -4/\sqrt{66} & -1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{6} & 7/\sqrt{66} & -1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{66} & 3/\sqrt{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -5\sqrt{66} & -5/(4\sqrt{11}) \\ 0 & \sqrt{6/11} & -5/(4\sqrt{11}) \\ 0 & 0 & 11/(4\sqrt{11}) \end{pmatrix}$$

ここであらわれた上三角行列の逆行列を T とおけば $A = BT$ すなわち

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & -4/\sqrt{66} & -1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{6} & 7/\sqrt{66} & -1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{66} & 3/\sqrt{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 5/\sqrt{6} & 5/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{11/6} & 5/\sqrt{66} \\ 0 & 0 & 4/\sqrt{11} \end{pmatrix}.$$

問題 2.5 の解答 (1) $\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n$ は正規直交系だから

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{f} - x_1\boldsymbol{e}_1 - x_2\boldsymbol{e}_2 - \cdots - x_n\boldsymbol{e}_n\|^2 &= \|\boldsymbol{f}\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ &= \|\boldsymbol{f}\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_i\rangle|^2 + \sum_{i=1}^{n} |x_i - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_i\rangle|^2\end{aligned}$$

したがって右辺が最小となるのはすべての $i = 1, ..., n$ について $x_i = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_i$ が成り立つときである。

(2) $x_i = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_i\rangle$ を (1) で得られた式に代入すると左辺は ≥ 0 ゆえ

$$\|\boldsymbol{f}\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_i\rangle|^2$$

を得る。ここで等号成立は $x_i = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_i\rangle$ かつ $\|\boldsymbol{f} - x_1\boldsymbol{e}_1 - x_2\boldsymbol{e}_2 - \cdots - x_n\boldsymbol{e}_n\| = 0$ のとき、すなわち

$$\boldsymbol{f} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_1\rangle\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_n\rangle\boldsymbol{e}_n$$

のときにかぎる。

問題 2.6 の解答

$$\|1\| = \left(\int_0^1 1 \cdot 1dx\right)^{1/2} = 1.$$

よって $p_0(x) = 1/\|1\| = 1$ とおく。次に $p_1'(x) = x - \langle x, p_0(x)\rangle p_0(x)$ とおく。

$$\langle x, p_0(x)\rangle = \int_0^1 x \cdot 1dx = \frac{1}{2}$$

だから $p_1'(x) = x - 1/2$.

$$p_1(x) = \frac{p_1'(x)}{\|p_1'(x)\|} = (x - 1/2)/\left(\int_0^1 (x - 1/2)^2 dx\right)^{1/2} = \sqrt{12}(x - \frac{1}{2}).$$

次に

$$\langle x^2, p_0(x)\rangle = \int_0^1 x^2 \cdot 1dx = \frac{1}{3}, \quad \langle x^2, p_1(x)\rangle = \int_0^1 x^2 \cdot \sqrt{12}(x - \frac{1}{2})dx = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

よって $p_2'(x) = x^2 - \langle x^2, p_0(x)\rangle p_0(x) - \langle x^2, p_1(x)\rangle p_1(x)$ とおくと $p_2'(x) = x^2 - x + 1/6$.

$$p_2(x) = \frac{p_2'(x)}{\|p_2'(x)\|} = \frac{x^2 - x + 1/6}{\left(\int_0^1 (x^2 - x + 1/6)^2 dx\right)^{1/2}} = \sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{6}).$$

次に

$$\langle x^3, p_0(x)\rangle = \int_0^1 x^3 \cdot 1dx = \frac{1}{4}, \quad \langle x^3, p_1(x)\rangle = \int_0^1 x^3 \cdot \sqrt{12}(x - \frac{1}{2})dx = \frac{3\sqrt{12}}{40}.$$

および

$$\langle x^3, p_2(x)\rangle = \int_0^1 x^3 \cdot \sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{6})dx = \frac{\sqrt{180}}{120}.$$

よって $p_3'(x) = x^3 - \langle x^3, p_0(x)\rangle p_0(x) - \langle x^3, p_1(x)\rangle p_1(x) - \langle x^3, p_2(x)\rangle p_2(x)$ とおくと $p_3'(x) = x^3 - (3/2)x^2 + (3/5)x - 1/20.$

$$p_3(x) = \frac{p_3'(x)}{\|p_3'(x)\|} = \frac{x^3 - (3/2)x^2 + (3/5)x - 1/20}{\left(\int_0^1 (x^3 - (3/2)x^2 + (3/5)x - 1/20)^2 dx\right)^{1/2}} = 20\sqrt{7}(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}).$$

よって、解答は $\left\{1,\ \sqrt{12}(x - \frac{1}{2}),\ \sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{6}),\ 20\sqrt{7}(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20})\right\}$

問題 2.7 の解答 l^2 を **2.5** の例と同じ空間とする。W_1 をこの例ででてきた部分ベクトル空間 W とし、W_2 をベクトル $(1, 1/2, ..., 1/n, ...)$ のスカラー倍からなる 1 次元部分ベクトル空間とする。このとき $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ だから $(W_1 \cap W_2)^\perp = l^2$. 一方 $W_1^\perp = \{\mathbf{0}\}$ ゆえ $W_1^\perp + W_2^\perp = W_2^\perp$. ところが $W_2^\perp$ に属さないベクトルはいくらでもある。たとえば $(1, 0, 0, ...)$. したがって $(W_1 \cap W_2)^\perp \neq W_1^\perp + W_2^\perp$.

問題 3.1 の解答 $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in K$ とすると

$$F((x_1 + y_1)\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (x_n + y_n)\boldsymbol{a}_n) = (x_1 + y_1)\boldsymbol{b}_1 + \cdots + (x_n + y_n)\boldsymbol{b}_n.$$

右辺は

$$(x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{b}_n) + (y_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{b}_n).$$

で、これは

$$F(x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n) + F(y_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{a}_n)$$

に等しい。また $\alpha \in K$ とするとき

$$F(\alpha(x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n)) = \alpha x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha x_n\boldsymbol{b}_n.$$

これは

$$\alpha F(x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n)$$

に等しい。よって F は線形写像で、定義から全射は明らかなので同型写像である。

逆に $F : V \to W$ が同型写像であるとすると、V の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n\}$ を一組選ぶとき $\{F(\boldsymbol{a}_1), ..., F(\boldsymbol{a}_n)\}$ は W の基底になる:

$$x_1 F(\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n F(\boldsymbol{a}_n) = \mathbf{0}$$

とすると

$$F(x_1 \boldsymbol{a}_1) + \cdots + x_n \boldsymbol{a}_n) = \mathbf{0}.$$

F は単射だから $x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$. すると $\{\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n\}$ は一次独立だから $x_1 = \cdots = x_n = 0$. よって $\{F(\boldsymbol{a}_1), ..., F(\boldsymbol{a}_n)\}$ は一次独立。F の線形性と全射性より W のすべてのベクトルが $F(\boldsymbol{a}_1), ..., F(\boldsymbol{a}_n)$ の一次結合で書けることが分かる。以上のことから $\{F(\boldsymbol{a}_1), ..., F(\boldsymbol{a}_n)\}$ は W の基底になることがわかり $\dim W = n = \dim V$.

問題 3.2 の解答

$$\boldsymbol{e}'_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, (j = 1, ..., n)$$

とおく。与えられた等式 $\boldsymbol{e}\ _j = \sum_{k=1}^n p_{kj}\boldsymbol{e}_k$ の第 i 成分の所を書き出せば

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n p_{kj} a_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ik} p_{kj}.$$

左辺は $(\boldsymbol{e}\ _1 \cdots \boldsymbol{e}\ _n)$ の (i, j) 成分に、右辺は $(\boldsymbol{e}_1 \cdots \boldsymbol{e}_n)P$ の (i, j) 成分に一致している。

問題 3.3 の解答 (1) $\mathrm{Ker} F_A$ を求める。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から、行基本変形を行なうと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ y + 2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

したがって

$$\mathrm{Ker} F_A = L(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

次に $\mathrm{Im}F_A$ を求める。 $\mathrm{Im}F_A$ はベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

で張られる。列基本変形を行なって

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって

$$\mathrm{Im}F_A = L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}).$$

よって $\dim \mathrm{Ker}F_A = 1$, $\dim \mathrm{Im}F_A = 2$.
(2) $\mathrm{Ker}F_A$ を求める。

$$\begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から、行基本変形を行なうと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+u \\ y-3z \\ z+3z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

したがって

$$\mathrm{Ker}F_A = L(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}).$$

次に $\mathrm{Im}F_A$ を求める。 $\mathrm{Im}F_A$ はベクトル A による単位ベクトルの像

$$\begin{pmatrix} 1^2 \\ 2^2 \\ 3^2 \\ 4^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2^2 \\ 3^2 \\ 4^2 \\ 5^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3^2 \\ 4^2 \\ 5^2 \\ 6^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4^2 \\ 5^2 \\ 6^2 \\ 7^2 \end{pmatrix}$$

で張られる。列基本変形を行なって

$$\begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって

$$\mathrm{Im}F_A = L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}).$$

よって $\dim \mathrm{Ker}F_A = 1$, $\dim \mathrm{Im}F_A = 3$.

問題 3.4 の解答 (1) は内積の定義 (**2.2.** 例 1) から明らか。(2) の写像の線形性も容易。残りは Gram-Schmidt の直交化法の応用である。$(1/\sqrt{n})I_n$ は長さ 1 をもつ。

$$B = A - \langle A, (1/\sqrt{n})I_n \rangle (1/\sqrt{n})I_n = A - \frac{1}{n}\langle A, I_n \rangle I_n$$

とおくと

$$\mathrm{tr}B = \langle B, I_n \rangle = \langle A, I_n \rangle - \frac{1}{n}\langle A, I_n \rangle \langle I_n, I_n \rangle = 0.$$

よって $B \in \mathrm{Ker\ tr}$. 一方、任意の $P \in \mathrm{Ker\ tr}$ に対して $\langle P, I_n \rangle = \mathrm{tr}P = 0$ だから $I_n \in (\mathrm{Ker\ tr})^{\perp}$. したがって

$$A = B + \frac{1}{n}\langle A, I_n \rangle I_n$$

が求めていた和になる。

問題 3.5 の解答

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ -11 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ -17 \end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ -11 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ -17 \end{pmatrix} + a_{32}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

から定まる行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

が F の表現行列である。これは

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 13 & 3 \\ 10 & 15 & 2 \\ -11 & -17 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

をみたすから

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 13 & 3 \\ 10 & 15 & 2 \\ -11 & -17 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 2 \\ -21 & -2 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}$$

問題 4.1,4.2 の解答 固有多項式を計算する。3 行から 2 行を引いて

$$\phi_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x-5 & 5 & -1 \\ -3 & x+3 & -1 \\ -3 & 5 & x-3 \end{vmatrix} = (x-2) \begin{vmatrix} x-5 & 5 & -1 \\ -3 & x+3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

さらに 2 列に 3 列を加えて

$$\phi_A(x) = (x-2) \begin{vmatrix} x-5 & 4 & -1 \\ -3 & x+2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-2) \begin{vmatrix} x-5 & 4 \\ -3 & x+2 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)^2$$

したがって固有値は $1, 2$. 1 の固有ベクトル空間は

$$W(1) = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -4 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} = \{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \}.$$

は 1 次元である。一方 2 の固有ベクトル空間は

$$W(1) = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} = \{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \}.$$

は 2 次元である。よって $\dim W(1) + \dim W(2) = 3$ であり、A は対角化可能。実際

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} \quad (W(1) \text{ の基底}), \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \} \quad (W(2) \text{ の基底}),$$

を選んで

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

問題 4.3 の解答　問題の行列を A とおくと A の固有多項式は

$$\begin{vmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x-2 & -2 & -1 \\ -1 & x-3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x-4).$$

(最初に 3 行から 2 行を引き、$(x-1)$ で括ってから次に 2 列に 3 列を加えた。) よって 1 と 4 が固有値であることが分かる。まず 1 に対する固有ベクトル空間を求めると

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+y+z=0.$$

$W(1)$ から 1 次独立なベクトルを選ぶことによって

$$W(1) = L(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}).$$

次に 4 に対する固有ベクトル空間を求める:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

したがって

$$W(4) = L(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

$W(1), W(4)$ それぞれの空間において（たとえばグラム・シュミットの方法をもちいて）正規直交基底を作る。$W(1)$ については

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

が正規直交系、$W(4)$ については

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が正規直交系。実対称行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交するので、上の 3 つのベクトルは $\mathbb{R}^3$ の正規直交系をなす。そこで

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

とおくと、これは直交行列であり

$${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

問題 4.4 の解答 (1)

$$xy + yz + zx = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

ここで現われる行列を A とおく。A の固有値は $-1/2$ (重根) と 1. 固有空間は

$$W(-\frac{1}{2}) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + z = 0\right\} = L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}),$$

および

$$W(1) = L(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}),$$

異なる固有値に対する $W(-1/2)$ のベクトルと $W(1)$ のベクトルは直交することは分かっているので、それぞれの固有空間で正規直交基底をつくると

$$W(-\frac{1}{2})=L(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}),\quad W(1)=L(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}).$$

そこで

$$P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&-2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

とおくと

$${}^tPAP=\begin{pmatrix}-1/2&0&0\\0&-1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

よって

$$\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{6}&-2/\sqrt{6}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&1/\sqrt{3}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

とおくと次の標準形を得る。

$$-\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}v^2+w^2.$$

(2) $xy+yz+zx=-\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}v^2+w^2=1$ は 2 葉双曲面となる（図省略）。

問題 4.5 の解答 (1) λ,μ を A の固有値とすると、これらは固有方程式

$$\begin{vmatrix}x-a&-b\\-b&x-c\end{vmatrix}=x^2-(a+c)x+ac-b^2=0$$

の解だから、$\lambda+\mu=a+b$, $\det A=\lambda\mu=ac-b^2$.

もし $a>0$, $\det A=ac-b^2>0$ ならば $ac>b^2\geq 0$ より $c>0$. したがって $\lambda+\mu>0$, $\lambda\mu>0$ となり $\lambda>0,\mu>0$.

逆に $\lambda>0,\mu>0$ ならば $a+c>0, ac>b^2\geq 0$ だから $a>0$ が成り立ち、$a>0,\det A>0$.
(2) は省略する。

問題 4.6 の解答

$$\begin{pmatrix}a_{n+2}\\a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}$$

である。ここに現われる 2 次正方行列を A とおく。この行列の固有値は

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

ここで $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$ である。α, β の固有ベクトルを一組、たとえば

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

を選び、行列

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を定めると、$D^{-1}AD$ は対角行列で

$$A = D \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} D^{-1}.$$

これから

$$A^n = D \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} D^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} & \alpha^n - \beta^n \\ \alpha^n - \beta^n & \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

だから

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$