複素解析学ノート

中西敏浩

目次

1　複素数

複素数とは

$$a + ib \qquad (a, b \text{ は実数})$$

と表示される「数」である。i は -1 の平方根 ($i^2 = -1$) で虚数単位と呼ばれる。もちろん i は実数でない。複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表わす。

複素数 $z = a + ib$ に対して a を z の**実部**，b を z の**虚部**といい，$a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$ と記す。２つの複素数 $z = a + ib$, $w = c + id$ は $a = c$ かつ $b = d$ のときに，かつこのときに限り同じであるとする。また, 実数 b に対し，$bi = ib$ とする。したがって，$a + ib$ は $a + bi$. 実数 a と $a + i0$ は同じとみなし，また $0 + ib$ を単に ib と記す。（とくに $b = 1$ のときは，bi を i で表す。）よって $0 = i0 = 0 + i0$.

1.1　複素数の演算

複素数の和と積を次で定める。これらは後に記す加法・乗法の交換法則・結合法則・分配法則が成り立つように定められたものである。複素数 $z = a + ib$, $w = c + id$ に対して

$$z + w = (a + c) + i(b + d),\ z - w = (a - c) + i(b - d),$$
$$zw = (ac - bd) + i(ad + cb).$$

$z = a + ib$ に対して $\bar{z} = a + i(-b)(= a - ib)$ を z の**共役複素数**[*1]という。$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} =$「$z\bar{z}$ の非負平方根」を z の**絶対値**という。$(a, b) \neq (0, 0)$ でなければ $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$. このことから $(c, d) \neq (0, 0)$ のとき

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} = \frac{(ac + bd) + i(-ad + cb)}{c^2 + d^2}.$$

複素数の演算は次をみたす：$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ とするとき

(交換法則) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 z_2 = z_2 z_1$,
(結合法則) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$,
(分配法則) $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $z + 0 = z$, $0z = 0$, $1z = z$ である。

複素数 z に対して次が成り立つ。

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \qquad |\operatorname{Im} z| \leq |z|. \tag{1.1}$$

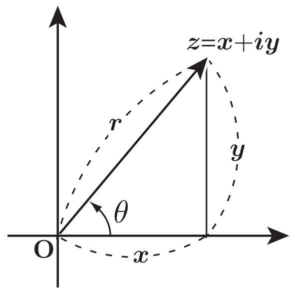
２つの複素数 z, w に対して，次の三角不等式が成り立つ。

$$||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|. \tag{1.2}$$

[*1] きょうやくふくそすう。最近「きょうえき」と間違って読む人が多い。昔は「共軛」と書いた。軛は「くびき」である。

1.2　複素平面

複素数 $z = x + iy$ を xy-平面上の点 (x, y) で表わす。$z \neq 0$ のとき原点 0 から z までの距離



$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ は z の絶対値である。実軸の正方向から 0 から z を結ぶ (向きのついた) 線分まで測った角 $\theta = \arg z$ を z の**偏角**という。偏角は 2π の整数倍の差を除いて一意に定まる[*2]。z は

$$z = r(\cos\theta + \sin\theta) \tag{1.3}$$

と表示できる。これを z の**極形式**という。$z = 0$ の極形式は $r = 0$ で θ は任意としておく。

極形式を用いると $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $w = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$ の積は

$$\begin{aligned} zw &= r\rho((\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + i(\sin\theta\cos\phi + \sin\phi\cos\theta)) \\ &= r\rho(\cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi)) \end{aligned} \tag{1.4}$$

であり

$$|zw| = |z||w|, \qquad \arg(zw) \equiv \arg z + \arg w \quad \mod 2\pi \tag{1.5}$$

とくに $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$. 以下繰り返し積を計算して $n = 0, 1, 2, ...$ に対する次の**ド・モアヴルの公式**を得る。

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{1.6}$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)}{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

だから (1.6) は負の整数 n についても成り立つ。

例 1.1　$(1 - i)^5$ を計算する。$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + \sin(-\pi/4))$ だから, ド・モアヴルの公式を用いて

$$(1 - i)^5 = (\sqrt{2})^5(\cos(-5\pi/4) + i\sin(-5\pi/4)) = 4\sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)) = -4 + 4i.$$

[*2] 2 つの実数 (あるいは複素数)x_1, x_2 に対してある整数 m が存在して $x_1 - x_2 = 2m\pi$ であることを $x_1 \equiv x_2 \mod 2\pi$ という記法で表わす。

1.3　べき乗根

補題 1.1　実数 θ, φ に対して $\cos\theta = \cos\varphi$ かつ $\sin\theta = \sin\varphi$ ならば，ある整数 m が存在して $\theta = \varphi + 2m\pi$. すなわち $\theta \equiv \varphi \mod 2\pi$.

複素数 $z(\neq 0)$ と正整数 n に対して z の n 乗根，すなわち $w^n = z$ をみたす複素数を求める。$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とし，今 $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ とおいてみる。ド・モアヴルの公式により

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = z = w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

- 両辺の絶対値を比較して $r = \rho^n$, すなわち $\rho = r^{1/n}(>0)$.
- 両辺の偏角を比較して，上の補題を用いると，ある整数 m が存在して $n\varphi = \theta + 2m\pi$, すなわち $\varphi = \dfrac{\theta + 2m\pi}{n}$.

逆に複素数 $w = r^{1/n}\left(\cos\dfrac{\theta+2m\pi}{n} + i\sin\dfrac{\theta+2m\pi}{n}\right)$ $(m \in \mathbb{Z})$ は $z = w^n$ をみたすことがわかる。ここで

$$\cos\frac{\theta+2(m+n)\pi}{n} = \cos\frac{\theta+2m\pi}{n}, \quad \sin\frac{\theta+2(m+n)\pi}{n} = i\sin\frac{\theta+2m\pi}{n}$$

だから m は $0, 1, ..., n-1$ に限定してよい。以上をまとめて

命題 1.1　複素数 $z(\neq 0)$ の n 乗根は次の n 個の複素数である。

$$r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2m\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2m\pi}{n}\right) \qquad (m = 0, 1, ..., n-1) \tag{1.7}$$

(1 の平方根): $1 = \cos 0 + i\sin 0$, $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$.
(1 の立方根 (3 乗根)): $1 = \cos 0 + i\sin 0$, $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$,
$\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.
(1 の 4 乗根): $1 = \cos 0 + i\sin 0$, $i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$, $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, $-i = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}$.
一般に 1 の n 乗根は単位円周 $|z| = 1$ の 1 を含む n 等分点である。

1.4　練習問題

1.4.1　練習問題

問題 1.1　$z=1+2i, w=2-i$ とするとき，次を計算せよ。答えは $a+ib$ の形にせよ。（ただし $b=0$ のときは，a を，$a=0$ のときは ib を答える。以下の問いについても同様）

(a)　$z+3w,$　　(b)　$\dfrac{w}{z}$　　(c)　$|z|$

(d)　$\mathrm{Re}\,(w^3+w)$　　(e)　$\mathrm{Im}\,(w^3+w)$　　(f)　$z^2+\bar{z}+i$

問題 1.2　$1+i+i^2+\cdots+i^{100}$ を $a+ib$ の形にせよ。（ヒント：まず $1+i+i^2+i^3$ を計算せよ。）

問題 1.3　次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角は $(-\pi,\pi]$ の範囲内で選ぶこと。

(a)　$4-4i,$　　(b)　$2i,$　　(c)　$\sqrt{3}-i$　　(d)　$-2,$　　(e)　$2i(\sqrt{3}-i).$

問題 1.4　$(1+i)^6$ を $a+ib$ の形にせよ。

問題 1.5　三角不等式 (1.2) を示せ。

問題 1.6　(1) $|z|=|w|=1,\ s>0$ のとき，次の不等式を示せ。

$$\left|sz-\frac{1}{s}w\right|\geq|z-w|.$$

(2) $|z_1|=|z_2|=1,\ r_1,r_2>0$ のとき，次の不等式を示せ。

$$|r_1z_1-r_2z_2|\left|1-\frac{\bar{z}_1z_2}{r_1r_2}\right|\geq|z_1-z_2|^2.$$

2　複素数と平面幾何

2.1　円と直線の方程式など

複素数 $z = a + ib,\ w = c + ib$ に対して

$$|z - w| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

は複素平面における z と w の間の距離である。

(円の方程式) 複素数 a と $r > 0$ に対して，複素平面の a 中心，半径 r の円は方程式

$$|z - a| = r$$

の解 z の集合である。この方程式は $A = 1, B = -\bar{a}, C = |a|^2 - r^2$ とおけば

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0 \tag{2.1}$$

で表される。

$$A,\ C \text{ は実数で } |B|^2 - AC = r^2 > 0 \tag{2.2}$$

に注意。逆に, この不等式が成り立つとき，$A \neq 0$ ならば (2.1) は円の方程式である：

$$\left|z + \frac{\bar{B}}{A}\right| = \frac{\sqrt{|B|^2 - AC}}{|A|} \quad \left(\text{中心 } -\frac{\bar{B}}{A},\ \text{半径 } \frac{\sqrt{|B|^2 - AC}}{|A|} \text{ の円}\right)$$

(直線の方程式) 次に直線の方程式

$$ax + by + c = 0 \quad (\text{ただし } a,\ b,\ c \text{ は実数で } (a,b) \neq (0,0))$$

は $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2},\ y = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$ を代入して (2.1) によって表される。ただし $A = 0,\ B = \dfrac{a - bi}{2}$, $C = c$ である。$|B|^2 - AC = |B|^2 > 0$ に注意する。逆に，$A = 0$ ならば (2.1) は直線の方程式 $ax + by + c = 0$ $(a = B + \bar{B},\ b = i(B - \bar{B}),\ c = C)$ である。

命題 2.1　複素平面における円または直線の方程式は

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0 \quad (A, C \in \mathbb{R},\ |B|^2 - AC > 0) \tag{2.3}$$

で与えられる。ただし $A = 0$ のときが直線の方程式。

注意 2.1　後の章で「直線」も「円」と見なすと便利であることがわかる。とくにリーマン球面を導入した後では「直線」は「無限遠点を通る円」とみなすことになる。

例 2.1　(アポロニウスの円) P と Q を平面上の異なる 2 点とする。点 R が「P と R の間の距離」と「Q と R の間の距離」の比を一定に保ったまま動くとき，その軌跡は円になる（ただし比が 1 のときは直線)。この円をアポロニウスの円と呼ぶ。

複素平面で考えて $P,\ Q$ を表わす複素数を $a,\ b$ とし R を表わす複素数を z とする。$r > 0$ を定数として

$$|z - a| = r|z - b|$$

が成り立つとする。この式を変形して

$$(r^2-1)z\bar{z}+(\bar{a}-r^2\bar{b})z+(a-r^2b)\bar{z}+|b|^2r^2-|a|^2=0. \tag{2.4}$$

ここで条件 (2.2) を確かめておく。実際，$A=r^2-1$, $B=\bar{a}-r^2\bar{b}$, $C=|b|^2r^2-|a|^2$ とおくと A, C は実数で

$$|B|^2-AC=r^2|a-b|^2>0$$

となる。よって，(2.4) は円となる。その中心と半径は

$$\text{中心}\quad \frac{a-r^2b}{1-r^2},\qquad \text{半径}\quad \frac{|a-b|r}{|r^2-1|}$$

ただし $r=1$ のときは直線（線分 PQ の垂直 2 等分線）である。

2.2　複素平面の相似変換

複素数の和は，複素数をそれが表わす複素平面上の点の位置ベクトルと同一視すると，ベクトルの和と同じであった。よって，a を複素数とするとき，複素平面上の変換（写像）

$$T(z)=z+a$$

は平行移動である。また $b=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ を 0 でない複素数とすると

$$S(z)=bz$$

はベクトル $\overrightarrow{0z}$ を原点 0 を中心に正方向（反時計回り）に θ だけ回転したあとで r 倍したものの終点である。したがって S と T の合成は

$$T(S(z))=bz+a\quad(a,b\in\mathbb{C},b\neq 0)$$

は複素平面上の**相似変換**[*3]である。

a, b, c を相異なる複素数とする。ベクトル $b-a$ を始点 a を中心に正方向（反時計回り）に θ だけ回転してベクトル $c-a$ と同じ向きになったとする。相似変換

$$F(z)=\frac{z-a}{b-a}=\frac{1}{b-a}z-\frac{a}{b-a}$$

は a, b をそれぞれ 0,1 に写し，しかも θ を変えないので，次が成り立つ。

$$\theta=\arg\frac{c-a}{b-a}.$$

例 2.2　相異なる複素数 a,b,c が正三角形の頂点であるための必要十分条件は

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0. \tag{2.5}$$

証明. (2.5) 式は a と b を入れ替えても不変なので，a, b, c を頂点とする三角形 $\triangle$ の周を反時計回りに進むと a, b, c の順に巡る場合のみを考える。もし $\triangle$ が正三角形であるための必要十分条

[*3] もう少し付け足すと「向きを保つ相似変換」である。

件は，ベクトル $b-a$ を a を中心に 60 ° 回転すると $c-a$ と重なり，ベクトル $c-b$ を b を中心に 60 ° 回転すると $a-b$ と重なり，ベクトル $a-c$ を c を中心に 60 ° 回転すると $b-a$ と重なることだから

$$\arg\frac{c-a}{b-a} = \arg\frac{a-b}{c-b} = \arg\frac{b-c}{a-c}\left(=\frac{\pi}{3}\right), \quad \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \left|\frac{a-b}{c-b}\right| = \left|\frac{b-c}{a-c}\right| (=1).$$

である。絶対値と偏角が一致していることにより，これらは次と同値な条件である。

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{a-b}{c-b} = \frac{b-c}{a-c}. \tag{2.6}$$

(2.6) から得られる 3 つの等式のどれからも (2.5) が得られ，逆もまた正しい。 □

2.3 練習問題

問題 2.1　次の等式をみたす z が描く図形を求めよ。

(1)　$z\bar{z}-(1-i)z-(1+i)\bar{z}=0$,

(2)　$|z-1|=2|z+2|$,

(3)　$z\bar{z}-z-\bar{z}+2=0$,

(4)　$(1-i)z+(1+i)\bar{z}-2=0$.

問題 2.2　C を中心 c と半径 R をもつ円とする。c を端点とする半直線上の 2 点 a と b が

$$|a-c||b-c| = R^2$$

をみたすとき，円 C に関して a は b の鏡像, b は a の鏡像であるという。もし a と b が円 C に関して互いに鏡像であるとき，円 C は a, b に関する一つのアポロニウス円であることを示せ。

問題 2.3　(定理 4.1 も参照) 異なる 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 が同一円（または直線）上にあるための必要十分条件は (z_1, z_2, z_3, z_4) が実数であることを証明せよ。

問題 2.4　次の等式をみたす z が描く図形を求めよ。r は正数とする。

(1)　$|z+1|+|z-1|=2r$,

(2)　$||z+1|-|z-1||=2r$.

3　複素平面の位相

3.1　開集合と閉集合

　複素数 a と $r > 0$ に対して

$$D(a, r) = \{z : |z - a| < r\}$$

は a 中心，半径 r の開円板である。

定義 3.1　$D \subset \mathbb{C}$ が**開集合**であるとは，$D = \emptyset$ であるか，または，D のすべての点 a に対して，ある $r = r(a) > 0$ が存在して

$$D(a, r) \subset D$$

となるときにいう。$F \subset \mathbb{C}$ が**閉集合**であるとは，補集合 $\mathbb{C} \setminus F$ が開集合であるときにいう。

例 3.1　a を実数とするとき，$L(a) = \{z : \mathrm{Re}\, z < a\}$ は開集合である。なぜならば，$r = a - \mathrm{Re}\, z$ とおくと，$r > 0$ で，$D(a, r) \subset L(a)$ をみたすからである。同様に，次の集合も開集合である。

$$R(a) = \{z : \mathrm{Re}\, z > a\}, \quad U(a) = \{z : \mathrm{Im}\, z > a\}, \quad B(a) = \{z : \mathrm{Im}\, z < a\}.$$

命題 3.1　次が成り立つ。
(1) U_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を開集合とすると，それらの和集合 $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ も開集合。
(2) 有限個の開集合 U_1, U_2,..., U_n の共通部分 $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ は開集合。

証明. (1) $U = \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ とおく。$a \in U$ とすると，ある $\lambda \in \Lambda$ があって $a \in U_\lambda$. U_λ は開集合だから，ある $r > 0$ があって $D(a, r) \subset U_\lambda$. よって $D(a, r) \subset U$ であり，U は開集合。
(2) $V = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ とおく。$a \in V$ とする。各 U_i は開集合ゆえ，ある $r_i > 0$ があって $D(a, r_i) \subset U_i$. $r = \min\{r_1, ..., r_n\}$ とおくと $D(a, r) \subset V$. よって，V は開集合。 □

例 3.2　a, b, c, d を実数で $a < b$, $c < d$ とすると，$D = \{z : a < \mathrm{Re}\, z < b,\ c < \mathrm{Im}\, z < d\}$ (長方形の内部) は開集合である。例 3.1 の記号を使うと $D = R(a) \cap L(b) \cap U(c) \cap B(d)$ だから。

定義 3.2　集合 $D \subset \mathbb{C}$ が**弧状連結**であるとは，D の任意の 2 点 a と b に対して，a と b を結ぶ D 内の連続曲線が存在する，すなわち，連続写像 $\gamma : [0, 1] \to D$ で $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ となるものが存在するときにいう。また，弧状連結な開集合を**領域**と呼ぶ。

3.2　数列の収束

定義 3.3　(数列の収束)　次が成り立つとき，複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が複素数 w に収束するという。

任意の正数 ϵ に対して，ある番号 N があって $n > N$ ならば $|z_n - w| < \epsilon$ (すなわち $z_n \in D(w,\epsilon)$).

複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が複素数 w に収束するとき，w を $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**極限**といい，

$$w = \lim_{n\to\infty} z_n \text{ あるいは } z_n \to w \ (n \to \infty)$$

と書く。$z_n = x_n + iy_n$, $w = a + ib$ (x_n, y_n, a, b は実数) のとき，次が成り立つ。

$$w = \lim_{n\to\infty} z_n \iff a = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ かつ } b = \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{3.1}$$

命題 3.2　F を閉集合とする。F 内の複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が複素数 w に収束するとき，$w \in F$.

証明.　$U = \mathbb{C} \setminus F$ とおくと U は開集合。$w \in U$ として矛盾を導く。ある $\epsilon > 0$ が存在して $D(w,\epsilon) \subset U$. 一方，ある N が存在して $n > N$ ならば $z_n \in D(w,\epsilon)$.　このとき，$z_n \in F \cap U = \emptyset$ となって矛盾。 □

定義 3.4　E を $\mathbb{C}$ の部分集合とする。$a \in E$ が次の性質をもつとき E の**内点**という: ある $r > 0$ が存在して $\mathbb{D}(a,r) = \{z : |z-a| < r\} \subset E$. E の内点全体の集合を $I(E)$ で表し，E の**内部**という。$I(E)$ は開集合である。$a \in E$ が次の性質をもつとき E の**集積点**という: 任意の $r > 0$ に対して $\mathbb{D}(a,r)$ に a 以外の E の点が含まれる。E の集積点全体の集合を $\bar{E}$ で表し，E の**閉包**という。$\bar{E}$ は開集合である。$\partial E = \bar{E} - I(E)$ を E の**境界**といい，その点を E の**境界点**という。

3.3 Bolzano-Weierstrass の定理

以下，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を複素数列とする。

定義 3.5　(コーシー列) 次が成り立つとき，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ は**コーシー列**という。

任意の正数 ϵ に対して，ある番号 N があって $n > m > N$ ならば $|z_n - z_m| < \epsilon$.

定理 3.1　$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある複素数に収束するための必要十分条件は $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列であること。

定義 3.6　(集積点) w に収束する $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列が存在するとき，w を $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**集積点**という。

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であるとは，ある $r > 0$ があって $|z_n| < r$ ($n = 1, 2, ...$) であるときにいう。

定理 3.2　(Bolzano-Weierstrass) 有界な複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ は集積点をもつ。

証明. ある $r > 0$ があって $\{z_n : n = 1, 2, ...\} \subset R = \{z : -r < \mathrm{Re}\, z_n < r, -r < \mathrm{Im}\, z < r\}$. R を縦に 2 等分，横に 2 等分して 4 つの閉正方形をつくる。それらの中で z_n を無限個含むものを 1 つ選び，それを R_1 とおく。$z_{n_1} \in R_1$ を一つ選ぶ。次に，R_1 を縦に 2 等分，横に 2 等分して 4 つの閉正方形をつくる。それらの中で z_n を無限個含むものを 1 つ選び，それを R_2 とおく。$z_{n_2} \in R_2$ を $n_2 > n_1$ となるように一つ選ぶ。以下，これを繰り返して，正方形の列

$$R_1 \supset R_2 \supset \cdots R_k \supset R_{k+1} \supset \cdots$$

(R_{k+1} は R_k を 4 等分した正方形一つ）と部分列

$$z_{n_k} \in R_k, \quad n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$

を見つける。$\epsilon > 0$ が与えられたとき，$\sqrt{2}r < 2^K \epsilon$ をみたす K を選ぶと，$k, \ell > K$ ならば $z_{n_k}, z_{n_\ell} \in R_K$ ゆえに

$$|z_{n_k} - z_{n_\ell}| < \frac{\sqrt{2}}{2^K} r < \epsilon.$$

よって $\{z_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ はコーシー列であり極限をもつ。 □

定義 3.7 (コンパクト集合) (1) 集合 $S \subset \mathbb{C}$ が**有界**であるとは, ある $r > 0$ があって $S \subset D(0, r)$ をみたすときにいう。
(2) 命題 3.2 と定理 3.2 より，次が成り立つ。K を有界閉集合とすると，任意の K 内の数列 $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ はある K の点を集積点にもつ。（この性質をもつ集合を**コンパクト集合**という。）

3.4 連続関数

D を複素平面の部分集合，$f(z)$ を D 上定義された複素数値関数とする。a を D の集積点とする。$f(z)$ が a において c に**収束する**，あるいはこのことを記号で表して

$$\lim_{z \to a} f(z) = c$$

であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ があって $z \in D \cap \mathbb{D}^*(a, \delta)$ ならば $|f(z) - c| < \epsilon$. ただし $\mathbb{D}^*(a, \delta) = \{z : 0 < |z - a| < \delta\}$.

定義 3.8 $f(z)$ を開集合 D 上定義された複素数値関数とする。$f(z)$ が $a \in D$ で**連続である**とは

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$$

が成り立つときにいう。$f(z)$ が D のすべての点で連続であるとき，**連続関数**という。

3.5 練習問題

問題 3.1 次の数列の集積点をすべて求めよ。

$$z_n = \frac{1}{n} + i(-1)^n \quad (n = 1, 2, ...)$$

問題 3.2 次の問いに答えよ。

(i) 複素平面 $\mathbb{C}$ は開集合であることを示せ。
(ii) $U = D(a, r)$ を a 中心，半径 r の開円板とする。すなわち，$U = \{z : |z - a| < r\}$. このとき，U は開集合であることを示せ。($b \in U$ のとき，$D(b, \rho) \subset U$ となるような $\rho > 0$ を求める。)

4　一次分数変換

4.1　リーマン球面

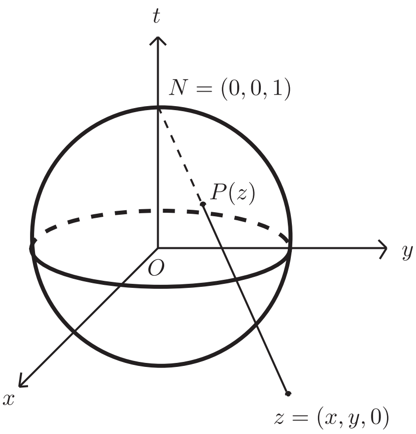
複素平面 $\mathbb{C}$ に**無限遠点**と呼ばれる点 ∞ を付け加えたものを $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ で表わす。今，複素数 $z = x + iy$ を (x, y, t)-空間の点 $(x, y, 0)$ と同一視する ($(x, y, 0)$ も z で表わす)　原点中心半径 1 の球面を $\mathbf{S} = \{(x, y, t) : x^2 + y^2 + t^2 = 1\}$ とおく。S の 2 点 $p_1 = (x_1, y_1, t_1)$, $p_2 = (x_2, y_2, t_2)$ の距離をユークリッド距離の制限

$$d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (t_1 - t_2)^2}$$

で与える。$\mathbf{S}$ の「北極」にあたる点を $N = (0, 0, 1)$ する。N と z を通る直線と $\mathbf{S}$ との交点は N および

$$P(z) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \tag{4.1}$$

である。このとき，$P : \mathbb{C} \to \mathbf{S} - N$ は同相写像である。$P(\infty) = N$ とおいて P を写像 $P : \bar{\mathbb{C}} \to \mathbf{S}$ に拡張する。



定義 4.1　$P : \bar{\mathbb{C}} \to \mathbf{S}$ が同相写像であるように $\bar{\mathbb{C}}$ に位相を定めるとき，$\bar{\mathbb{C}}$ を**リーマン球面**と呼ぶ。

すなわち，リーマン球面 $\bar{\mathbb{C}}$ の位相は，$z, w \in \bar{\mathbb{C}}$ 間の距離（球面弦距離）を

$$d_S(z, w) = d(P(z), P(w)) \tag{4.2}$$

で定めたときの距離空間としての位相である。

4.2 一次分数変換

関数

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0) \tag{4.3}$$

を**一次分数変換**（あるいは**メビウス変換**）という。$f(\infty) = a/c$, $f(-d/c) = \infty$ (ただし $c=0$ のときは $f(\infty)=\infty$) とおくと，$f(z)$ はリーマン球面上の写像である。次の形の関数は一次分数変換の特別なものである。

(1) $f(z) = z + b$ 複素平面の平行移動である。
(2) $f(z) = az$ $(a \neq 0)$ は $a = re^{i\theta}$ と表わすと，原点のまわりの角 θ の回転 $z \mapsto e^{i\theta}$ と伸縮 $z \mapsto rz$ との合成である。
(3) $f(z) = 1/z$. $f(z)$ は単位円周に関する鏡映 $z \mapsto 1/\bar{z}$ と実軸に関する鏡映 $z \mapsto \bar{z}$ の合成である。

この中で (1) は合同変換，(2) は相似変換だから，円（ただし直線も円であると考える）を円に写す。(3) については $w = f(z) = 1/z$ とおくと $z = 1/w$ だから，円　$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$ $(A, C \in \mathbb{R}, B\bar{B} - C > 0)$ の $f(z)$ による像は方程式

$$A\left(\frac{1}{w}\right)\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} + B\left(\frac{1}{w}\right) + \bar{B}\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} + C = 0 \Leftrightarrow Cw\bar{w} + \bar{B}w + B\bar{w} + A = 0$$

の解集合で，したがって円になる。一般の一次分数変換 (4.3) については, $c \neq 0$ のときは

$$w = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{c}\left(z + \frac{d}{c}\right) - \frac{ad}{c^2} + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}.$$

は

$$z_1 = z + \frac{d}{c},\ z_2 = \frac{1}{z_1},\ z_3 = \frac{bc-ad}{c^2}z_2,\ w = z_3 + \frac{a}{c}$$

の合成である。$c = 0$ のときは $w = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{c}$ は $z_1 = \dfrac{a}{d}z$ と $w = z_1 + \dfrac{b}{d}$ の合成である。すなわち一般の一次分数変換は (1),(2),(3) のタイプの変換の合成で表わされる。したがって

命題 4.1 **（一次分数変換の円円対応）**　一次分数変換 (4.3) は円を円に変換する。

4.3 複比（非調和比）

リーマン球面の互いに異なる 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 の**複比** (cross ratio) を次で定める[*4]：

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}. \tag{4.4}$$

[*4] 非調和比ともいう。テキストによって z_1, z_2, z_3, z_4 の順序が異なる場合があるので注意する。

ただし，z_1, z_2, z_3, z_4 の中に ∞ が含まれれば，極限をとって考える。たとえば

$$(z_1,\infty,z_3,z_4)=\lim_{z_2\to\infty}(z_1,z_2,z_3,z_4)=\lim_{z_2\to\infty}\frac{(z_1-z_3)(1-z_4/z_2)}{(z_1-z_4)(1-z_3/z_2)}=\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}.$$

命題 4.2　$f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ を一次分数変換とすると，

$$(f(z_1),f(z_2),f(z_3),f(z_4))=(z_1,z_2,z_3,z_4). \tag{4.5}$$

証明.

$$f(z)-f(w)=\frac{(ad-bc)(z-w)}{(cz+d)(cw+d)}\quad (z,w\in\mathbb{C}) \tag{4.6}$$

が成り立つことを用いて，z_1, z_2, z_3, z_4 およびこれらの $f(z)$ による像のいずれもが ∞ でないときは (4.5) が成り立つことが示せる。一般の場合は極限をとることによる。 □

$\bar{\mathbb{C}}$ の互いに異なる 3 点 z_2, z_3, z_4 に対して

$$T(z)=(z,z_2,z_3,z_4)=\frac{(z-z_3)(z_2-z_4)}{(z-z_4)(z_2-z_3)}$$

は z_2, z_3, z_4 をそれぞれ 1,0,∞ に写す一次分数変換である。もし z_1 が z_2, z_3, z_4 を通る円または直線上にあれば，$f(z_1)$, 1, 0, ∞ は命題 4.1 により同一円または直線上，今の場合は $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 上にある。よって $T(z_1)=(z_1,z_2,z_3,z_4)\in\mathbb{R}$. この逆も正しく

定理 4.1　異なる 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 が同一円（または直線）上にあるための必要十分条件は (z_1,z_2,z_3,z_4) が実数であること。

4.4　練習問題

問題 4.1　（球面弦距離の表示）$\hat{\mathbb{C}}$ の球面弦距離は

$$d_S(z,w)=\begin{cases}\dfrac{2|z-w|}{\sqrt{|z|^2+1}\sqrt{|w|^2+1}} & (z,w\in\mathbb{C})\\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{|z|^2+1}} & (z\in\mathbb{C},w=\infty)\end{cases}$$

であることを示せ。

問題 4.2　（一次分数変換群）
(1) $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ を一次分数変換とするとき，その逆写像も一次分数変換で，次の形になることを示せ。

$$f^{-1}(z)=\frac{dz-b}{-cz+a}$$

(2) 2 つの一次分数変換

$$f(z)=\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1},\quad g(z)=\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$$

の合成も一次分数変換で，次の形になることを示せ。

$$(g\circ f)(z)=g(f(z))=\frac{(a_2a_1+b_2c_1)z+(a_2b_1+b_2d_1)}{(c_2a_1+d_2c_1)z+(c_2b_1+d_2d_1)}.$$

問題 4.3 （$0, 1, \infty$ を保存する一次分数変換）次の 6 つの一次分数変換を考える。

$$S_1(z) = z, \qquad S_2(z) = \frac{z}{z-1}, \qquad S_3(z) = 1 - z,$$

$$S_4(z) = \frac{1}{1-z}, \qquad S_5(z) = \frac{z-1}{z} \qquad S_6(z) = \frac{1}{z}$$

S_i と S_j $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ に対して，それらの合成関数 $S_i(S_j(z))$ を求めて表を作成せよ。例えば，$S_1(z) = z$ は恒等変換ゆえ $S_i(S_1(z)) = S_1(S_i(z)) = S_i(z)$ である。

$$S_2(S_3(z)) = \frac{(1-z)}{(1-z)-1} = \frac{z-1}{z} = S_5(z)$$

ゆえ，表の 2 行 3 列のところは $S_5(z)$ である。

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
S_1	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
S_2	S_2		S_5			
S_3	S_3					
S_4	S_4					
S_5	S_5					
S_6	S_6					

問題 4.4 （複比）

(1) (∞, z_2, z_3, z_4), (z_1, z_2, ∞, z_4), (z_1, z_2, z_3, ∞) の表示を求めよ。

(2) 複比 (z_1, z_2, z_3, z_4) について，次を示せ。

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_2, z_1, z_4, z_3) = (z_3, z_4, z_1, z_2) = (z_4, z_3, z_2, z_1)$$

(3) $w = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ とするとき，z_1, z_2, z_3, z_4 のすべての置換に対する複比を w を用いて表わせ。（注：z_1, z_2, z_3, z_4 の置換は 24 通りあるが，問 (2) の結果を用いることにより，(z_1, z_2, z_3, z_4), (z_1, z_2, z_4, z_3), (z_1, z_3, z_2, z_4), (z_1, z_3, z_4, z_2), (z_1, z_4, z_2, z_3), (z_1, z_4, z_3, z_2) のみを考えればよいことがわかる。）

問題 4.5 （一次分数変換の円円対応）

$$A|z|^2 + Bz + B\bar{z} + C = 0$$

(A, C は実数, $|B|^2 - AC > 0$) は $A \neq 0$ のとき，中心 $-\bar{B}/A$, 半径 $\sqrt{|B|^2 - AC}/|A|$ の円を表す。一次分数変換

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

によるこの円の像（または直線) を求めよ。

5　初等関数

5.1　複素関数

集合 $D \subset \mathbb{C}$ の各点 z に 1 つの複素数を対応させる関数 $f : D \to \mathbb{C}$ を考える。D を f の**定義域**という。$z = x + iy$ (x, y は実数) とすると，$f(z)$ は x, y の 2 変数の実関数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ を定める。

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{5.1}$$

例 5.1　$f(z) = z^2$ とする。(定義域は $\mathbb{C}$ 全体) $z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ より，

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

逆に，2 変数の実関数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ が与えられると，

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

を用いて (5.1) の右辺の z を用いた表示が得られる。

例 5.2　$f(z) = x^2 + y - 2ix$ とすると

$$\begin{aligned} f(z) = (x^2 + y) + i(-2x) &= \left(\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 + \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + i(-2)\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} - i\frac{z - \bar{z}}{2}\right) + i(-z - \bar{z}) \\ &= \frac{z^2}{4} + \frac{z\bar{z}}{2} + \frac{\bar{z}^2}{4} - \frac{3}{2}iz - \frac{1}{2}i\bar{z}. \end{aligned}$$

5.2　指数関数

5.2.1　オイラーの公式

次の基本的な関数のマクローリン展開を思い出そう。

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots +$$

この式に形式的に x に ix を代入する。

$$i^n = \begin{cases} 1 & (n = 4k \ (k \text{ は整数}) \text{ のとき}) \\ i & (n = 4k + 1 \ (k \text{ は整数}) \text{ のとき}) \\ -1 & (n = 4k + 2 \ (k \text{ は整数}) \text{ のとき}) \\ -i & (n = 4k + 3 \ (k \text{ は整数}) \text{ のとき}) \end{cases}$$

だから

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{5^4}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots\right)$$

三角関数 $\cos x$, $\sin x$ のマクローリン展開も思い出すと，上式は（あくまでも形式的に！）

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{5.2}$$

と書くことができる。これを**オイラーの公式**という。

5.2.2　指数関数

我々は (5.2) を逆手にとり，さらに指数関数の基本的性質 $e^{a+b} = e^a e^b$ を考慮にして

定義 5.1　複素数の指数関数を

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \quad (x, y \text{ は実数}) \tag{5.3}$$

によって定義する。三角関数の性質（周期性と加法公式）を用いて次が分かる。z, w は任意の複素数とする。

$$e^{z+w} = e^z e^w \tag{5.4}$$

$$e^{z+2\pi i} = e^z \tag{5.5}$$

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z} \tag{5.6}$$

$$e^{\bar{z}} = \overline{e^z} \tag{5.7}$$

最後の (5.7) を示す。$z = x + iy$ とすると

$$e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = e^x(\cos(-y) + i\sin(-y)) = e^x(\cos y - i \sin y) = \overline{e^x(\cos y + i \sin y)} = \overline{e^z}$$

5.2.3　ド・モアヴルの公式の応用

$\zeta = \cos\theta + i \sin\theta$ とおく。等比数列の和より

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^n = \frac{1 - \zeta^{n+1}}{1 - \zeta}.$$

この式においてド・モアヴルの公式から得られる $\zeta^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ を代入して，両辺の実部と虚部を比較すると

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \mathrm{Re}\left(\frac{1 - \zeta^{n+1}}{1 - \zeta}\right)$$

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta = \mathrm{Im}\left(\frac{1 - \zeta^{n+1}}{1 - \zeta}\right)$$

を得る。ここで

$$\frac{1 - \zeta^{n+1}}{1 - \zeta} = \zeta^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\zeta^{\frac{n+1}{2}} - \zeta^{-\frac{n+1}{2}}}{\zeta^{\frac{1}{2}} - \zeta^{-\frac{1}{2}}}\right) = [\cos(n\theta/2) + i \sin(n\theta/2)] \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

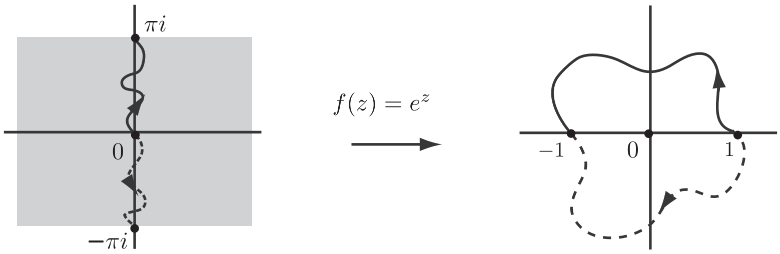
したがって

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{\cos\frac{n\theta}{2} \sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}},$$

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta = \frac{\sin\frac{n\theta}{2} \sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

5.2.4　対数関数

$f(z) = e^z$ を指数関数とする。$w = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ を単位上半円上の点とし，その $f(z)$ による逆像 $g_1(w)$ を $g_1(1) = 0$ かつ w について連続になるように選ぶと $g_1(e^{i\theta}) = i\theta$ で，とくに $g_1(-1) = \pi i$. 今度は $w = e^{-i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ を単位下半円上の点とし，その $f(z)$ による逆像 $g_2(w)$ を $g_2(1) = 0$ かつ w について連続になるように選ぶと $g_2(e^{-i\theta}) = -i\theta$ で，とくに $g_2(-1) = -\pi i$.　よって単位円を含むような領域では $f(z)$ の連続な逆関数は存在しない。同じことは 0 のまわりを一周する閉曲線を含む領域についてもいえる。



つまり，e^z の逆関数 $\log z$ を考えるときは定義域に制限を付けなければいけない。よく用いられるのは $\Omega = \mathbb{C} - \{x : -\infty < x \leq 0\}$ において $\log(Re^{i\Theta}) = \log R + i\Theta$ $(|\Theta| < \pi$, $\log R = \log_e R$ は実対数関数) としたもので，対数関数の**主値** (principal value) と呼ぶこともある。ただし，$\log z$ が主値を表すとすると $z = re^{i\theta}$ $(\pi/2 < \theta < \pi)$ のとき

$$\pi < 2\theta < 2\pi$$

だから

$$\log z^2 = \log r^2 e^{2i\theta} = 2\log r + i(2\theta - 2\pi)$$

となって $\log z^2 = 2\log z$ が成り立たなくなる[*5]。

5.3　三角関数

5.3.1　三角関数

オイラーの公式により

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x.$$

これらを用いて

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

定義 5.2　複素数の三角関数はこの式を逆手にとって

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \tag{5.8}$$

によって定義する。

[*5] このように，定義域への制限に拘りすぎると，不自由なことも多く出てくる。そこで考えられたのが**リーマン面**という概念である。

複素数の三角関数についても次が成り立つ。

$$\text{(周期性)}\quad \cos(z+2\pi)=\cos z,\ \sin(z+2\pi)=\sin z \tag{5.9}$$

$$\text{(加法公式)}\quad \begin{array}{l}\cos(z+w)=\cos z\cos w-\sin z\sin w,\\ \sin(z+w)=\sin z\cos w+\sin w\cos z.\end{array} \tag{5.10}$$

また (5.7) を用いて，次がわかる:

$$\overline{\cos z}=\cos\bar{z},\qquad \overline{\sin z}=\sin\bar{z} \tag{5.11}$$

例 5.3　方程式

$$\sin z=2$$

を解く。$\zeta=e^{iz}$ とおくと

$$2=\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{\zeta-\zeta^{-1}}{2i}.$$

よって $\zeta^2-4i\zeta-1=0$. この 2 次方程式を解いて

$$\zeta=2i\pm\sqrt{(2i)^2-(-1)}=2i\pm\sqrt{-3}=(2\pm\sqrt{3})i.$$

$z=x+iy$ とおくと

$$e^{i(x+iy)}=e^{-y+ix}=\zeta=(2\pm\sqrt{3})i.$$

$2+\sqrt{3}>2-\sqrt{3}>0$ ゆえ

$$e^{-y}=|e^{-y+ix}|=|(2\pm\sqrt{3})i|=2\pm\sqrt{3},\ \text{よって}\ y=-\log_e(2\pm\sqrt{3})=\log_e(2\mp\sqrt{3})$$

$$x=\arg e^{-y+ix}=\arg(2\pm\sqrt{3})i=\arg i\equiv\frac{\pi}{2}\qquad \mathrm{mod}\ 2\pi.$$

したがって

$$\begin{aligned}z=x+iy&=\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)+i\log_e(2\pm\sqrt{3})\\ &=\frac{1}{2}\pi+2n\pi+i\log_e(2\pm\sqrt{3})\qquad (n\ \text{は整数})\end{aligned}$$

5.3.2　$\sin z$ **はどのような関数か？**

$z=x+iy$, $X+iY=\sin(x+iy)$ とおくと

$$\begin{aligned}\sin z=\frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i}&=-\frac{i}{2}\left(e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^{y}(\cos x-i\sin x)\right)\\ &=\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)\sin x+\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)\cos x=\cosh y\sin x+i\sinh y\cos x.\end{aligned}$$

より，

$$X=\cosh y\sin x,\qquad Y=\sinh y\cos x. \tag{5.12}$$

$\sin z$ は 2π の周期をもち，かつ $\sin(z+\pi)=-\sin z$ だから，$-\pi/2\le \mathrm{Re}\, z\le\pi/2$ 上の $\sin z$ を写像の様子を知れば，全体での写像の様子がわかる。今，

$$D_1=\{z=x+iy:0\le x\le\pi/2,y\ge 0\}$$

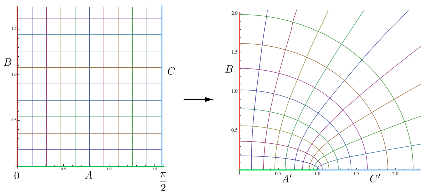
を定める。D_1 の底辺 $A=\{x+i0:0\le x\le \pi/2\}$ 上では $\sin x$ は実関数としての $\sin x$ と等しく, A を線分 $A'=\{x+i0:0\le x\le 1\}$ に写す。左辺 $B=\{0+iy:y\ge 0\}$ 上では, $\sin(0+iy)=i\sinh y$ で，B をそれ自身に写す。右辺 $C=\{\pi/2+iy:y\ge 0\}$ 上では，$\sin(0+iy)=\cosh y$ で，C を $C'=\{x+i0:x\ge 1\}$ に写す。次に水平線分 $H_y=\{x+iy:0\le x\le \pi/2\}$ ($y>0$ は固定) を考える。(5.12) により，$\sin z$ による H_y の像は次の楕円の第一象限にある部分である：

$$\left(\frac{X}{\cosh y}\right)^2+\left(\frac{Y}{\sinh y}\right)^2=1.$$

次に垂直半直線 $V_x=\{x+iy:0\le y\}$ ($0<x<\pi/2$ は固定) を考える。(5.12) により，$\sin z$ による V_x の像は次の双曲線の第一象限にある部分である：

$$\left(\frac{X}{\sin x}\right)^2-\left(\frac{Y}{\cos x}\right)^2=1.$$

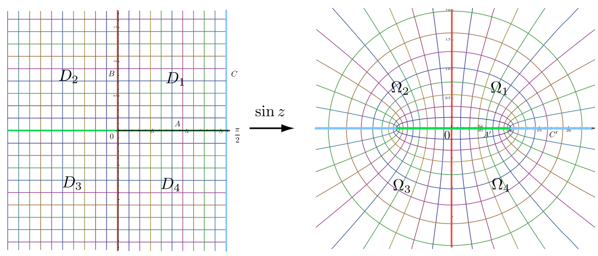
$\sin z$ は D_1 を第 1 象限 $\Omega_1=\{z=x+iy:x\ge 0,y\ge 0\}$ に写す。



D_1 を虚軸に沿って折り返したものを D_2 とおく。このとき, 折り返しによって，D_1 の点 z は $-\bar{z}$ に写され,

$$\sin(-\bar{z})=-\sin(\bar{z})=-\overline{\sin z}$$

だから，$\sin z$ は Ω_1 を虚軸に沿ってて折り返した領域 Ω_2，すなわち第 2 象限に写す。D_1, D_2 を実軸に沿って折り返したものを，そえぞれ D_4,D_3 とおく。この折り返しを表わす写像は $z\to\bar{z}$ で，$\sin(\bar{z})=\overline{\sin z}$ だから，D_3,D_4 の $\sin z$ による像 Ω_3, Ω_4 は，それぞれ第 3 象限，第 4 象限である。



5.4 練習問題

双曲線関数を

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

で定める。

問題 5.1　x, y は実数とする。次を示せ。

(1)　$\sinh z = -i \sin(iz), \quad \cosh z = \cos(iz)$,
(2)　$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$,
(3)　$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$,
(4)　$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$,
(5)　$\sinh(x + iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$,
(6)　$\cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$,
(7)　$|\sin(x + iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$,
(8)　$|\cos(x + iy)|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$.

問題 5.2　次の不等式を示せ。

$$|\mathrm{Im}\, z| \le |\sin z| \le e^{|\mathrm{Im}\, z|}.$$

問題 5.3　領域 $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{i\eta : 1 \le |\eta|\}$ で定義される $w = \tan z$ の連続な逆関数で 0 で値 0 をとるものを $\arctan w$ で表す。

$$\arctan w = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iw}{1 - iw}$$

であることを示せ。ただし，$\log 1 = 0$ とする。

問題 5.4　次をみたす複素数 z をすべて求めよ。

(1)　$\cos z = \sqrt{3}$,
(2)　$\tan z = 2i$.

6　正則関数

6.1　複素関数の微分

$D \subset \mathbb{C}$ を開集合，$f(z)$ を D に定義域をもつ複素数値関数とする。

定義 6.1　$f(z)$ が D の点 c において**微分可能である**とは

$$\alpha = \lim_{z \to c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c} \tag{6.1}$$

が存在するときにいう。この極限値 α を $f(z)$ の c における**微分係数**といい，次で表す。

$$\alpha = f'(c) = \frac{df}{dz}(c).$$

今，

$$f(z) = f(c) + \alpha(z - c) + \epsilon(z) \tag{6.2}$$

と書くと，

$$\lim_{z \to c} \frac{\epsilon(z)}{z - c} = 0 \quad \left(\text{これは } \lim_{z \to c} \frac{|\epsilon(z)|}{|z - c|} = 0 \text{ と同じ} \right) \tag{6.3}$$

だから，$f(z)$ が c で微分可能であるとは，複素数 α と (6.3) をみたす関数 $\epsilon(z)$ が存在して (6.2) のように書けることである。$f(z)$ と $g(z)$ が c で微分可能であるとき，実 1 変数の関数の微分と同様に次が成り立つ。

(1) α, β を複素定数とし，$(\alpha f + \beta g)(z) = \alpha f(z) + \beta g(z)$ とおくと，

$$\frac{d}{dz}(\alpha f + \beta g)(c) = \alpha f'(c) + \beta g'(c).$$

(2) $(fg)(z) = f(z)g(z)$ とおくと，

$$\frac{d(fg)}{dz}(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

(3) $(f/g)(z) = f(z)/g(z)$ とおくと，$g(c) \neq 0$ のとき，

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{f}{g}\right)(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}.$$

$g(z)$ が c で微分可能，$g(c)$ を含む開集合で定義された関数 $f(z)$ が $g(c)$ で微分可能であるとき，合成関数 $(f \circ g)(z) = f(g(z))$ について，

(4) $\displaystyle \frac{d(f \circ g)}{dz} = f'(g(c))g'(c).$

例 6.1　$f(z) = z^n$ $(n = 1, 2, ...)$, $c \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{z \to c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c} = \frac{z^n - c^n}{z - c} \\ &= \lim_{z \to c} \frac{(z - c)(z^{n-1} + z^{n-2}c + \cdots + zc^{n-2} + c^{n-1})}{z - c} \\ &= \lim_{z \to c}(z^{n-1} + z^{n-2}c + \cdots + zc^{n-2} + c^{n-1}) \\ &= nc^{n-1}. \end{aligned}$$

定義 6.2　$f(z)$ が D のすべての点で微分可能であるとき，$f(z)$ は**正則関数**であるという。このとき，$f(z)$ の導関数 $f'(z)$ が存在する。

多項式関数 $f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 (a_0,..., a_n$ は定数) は複素平面 $\mathbb{C}$ 全体で正則な関数である。有理関数 $f(z) = P(z)/Q(z)$ ($P(z)$ と $Q(z)$ は多項式[*6]) は $\mathbb{C}$ から $Q(c) = 0$ をみたす c の集合を除いて正則である。

6.2　Cauchy-Riemann の方程式

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $(z = x + iy)$ とおく。ただし，$u(x, y)$ と $v(x, y)$ は実数値関数である。$c = a + ib$ とし，$u(x, y)$ と $v(x, y)$ は (a, b) で全微分可能であるとする。すなわち，次のように書けるとする。

$$u(x, y) = u(a, b) + A(x - a) + B(y - b) + \epsilon_1(x, y)$$

$$v(x, y) = v(a, b) + C(x - a) + D(y - b) + \epsilon_2(x, y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\epsilon_i(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0,\ (i = 1, 2) \tag{6.4}$$

ただし，

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}(a, b),\ B = \frac{\partial u}{\partial y}(a, b),\ C = \frac{\partial v}{\partial x}(a, b),\ D = \frac{\partial v}{\partial y}(a, b),$$

$\epsilon(z) = \epsilon_1(x, y) + i\epsilon_2(x, y)$ とおくと

$$\begin{aligned}
f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) \\
&= (u(a, b) + A(x - a) + B(y - b) + \epsilon_1(x, y)) + i\,(v(a, b) + C(x - a) + D(y - b) + \epsilon_2(x, y)) \\
&= f(c) + (A + iC)(x - a) + (B + iD)(y - b) + \epsilon(z) \\
&= f(c) + (A + iC)\left(\frac{(z - c) + \overline{(z - c)}}{2}\right) + (B + iD)\left(\frac{(z - c) - \overline{(z - c)}}{2i}\right) + \epsilon(z) \\
&= f(c) + \frac{(A + D) + i(C - B)}{2}(z - c) + \frac{(A - D) + i(C - B)}{2}\overline{(z - c)} + \epsilon(z).
\end{aligned} \tag{6.5}$$

ここで

$$\frac{|\epsilon_i(x, y)|}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} \le \frac{|\epsilon(z)|}{|z - c|} \le \frac{|\epsilon_1(x, y)| + |\epsilon_2(x, y)|}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}},\ (i = 1, 2)$$

だから，(6.4) と次式は同じことである。

$$\lim_{z\to c} \frac{\epsilon(z)}{z - c} = 0.$$

ここで (6.2) と (6.5) を見比べて，次がわかる。

定理 6.1　($u(x, y)$ と $v(x, y)$ は (a, b) で全微分可能であるとする。)　$f(z)$ が c で微分可能であるための必要十分条件は $A = D$, $B = -C$, すなわち，次の **Cauchy-Riemann の関係式**が成り立つことである。

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a, b), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a, b). \tag{6.6}$$

[*6] $P(z)$ と $Q(z)$ は共通因子をもたないと仮定する。

このとき

$$f'(c) = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a,b) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a,b). \tag{6.7}$$

$f(z)$ が正則関数であるためには，定義域の各点で Cauchy-Riemann の関係式が成り立つこと，すなわち，次の **Cauchy-Riemann の方程式**が成り立つことである。

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \tag{6.8}$$

このとき

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y). \tag{6.9}$$

例 6.2　指数関数 e^z は複素平面全体で正則な関数である。

$$e^z = u(x,y) + iv(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

ここで $u(x,y)$, $v(x,y)$ は C^1 級ゆえ，各点で全微分可能。

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

であり，Cauchy-Riemann の方程式が成り立つから，e^z は正則である。

$$\frac{d}{dz}e^z = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z. \tag{6.10}$$

また，合成関数の微分から

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\cos z &= \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right) = \left(\frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2}\right) = -\sin z \\ \frac{d}{dz}\sin z &= \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right) = \left(\frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i}\right) = \cos z. \end{aligned} \tag{6.11}$$

6.3　練習問題

問題 6.1　　$z = x + iy$ とおく。関数

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$$

について，$u(x,y)$ と $v(x,y)$ が Cauchy-Riemann の方程式をみたすことを確認し，さらに $f(z)$ の導関数 $f'(z)$ を z を用いて表わせ。

問題 6.2　　$z = x + iy$ $(x > 0)$ とおく。関数

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \frac{1}{2}\log_e(x^2+y^2) + i\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

(arctan は tan の逆関数である）について，$u(x,y)$ と $v(x,y)$ が Cauchy-Riemann の方程式をみたすことを確認し，さらに $f(z)$ の導関数 $f'(z)$ を z を用いて表わせ。

7　等角写像

7.1　逆写像の定理

xy-平面の領域 D から uv-平面への写像

$$(u, v) = (u(x, y), v(x, y)) \tag{7.1}$$

を考える。ここで，$u(x, y)$, $v(x, y)$ は C^1 級関数とする。D の点 (a, b) において，

$$\begin{vmatrix} u_x(a,b) & u_y(a,b) \\ v_x(a,b) & v_y(a,b) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{7.2}$$

が成り立つとき，逆写像の定理により，P の近傍 U と $Q = (u(a, b), v(a, b))$ の近傍 V が存在して，$(u(x, y), v(x, y))$ は U から V への C^1 級同相写像になる。V における $(u(x, y), v(x, y))$ の逆写像を $(x(u, v), y(u, v))$ とおくと，次が成り立つ

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{pmatrix}. \tag{7.3}$$

ここで

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

複素平面と xy-平面を同一視し，$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $(z = x + iy)$ を D 上定義された正則関数とする。$c = a + ib$ において $f'(c) = u_x(a, b) + iv_x(a, b) \neq 0$ ならば, Cauchy-Riemann 方程式により

$$|f'(c)|^2 = \begin{vmatrix} u_x(a,b) & u_y(a,b) \\ v_x(a,b) & v_y(a,b) \end{vmatrix} = u_x(a, b)^2 + v_x(a, b)^2 > 0.$$

よって c の近傍 U と $f(c)$ の近傍 V が存在して，$f : U \to V$ は C^1 級同相写像になる。その逆写像 $g(w)$ $(w = u + iv)$ も (7.3) から，V の各点で Cauchy-Riemann 方程式をみたすことがわかり，正則関数である。$w = u + iv = f(z)$ とおくと

$$g'(w) = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + i\frac{\partial y}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\overline{f'(z)}}{|f'(z)|^2} = \frac{1}{f'(z)}$$

まとめると

定理 7.1　(逆関数の定理)[*7]　正則関数 $f(z)$ が $f(c) \neq 0$ をみたすならば，c の近傍 U と $f(c)$ の近傍 V が存在して，f は U から V への全単射で，その逆関数 $g(w)$ は正則関数で次をみたす。

$$g'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}. \tag{7.4}$$

[*7] 後の章で，逆関数の定理の偏角の原理を用いた別証明を与える。定理 21.6 を見よ。

7.2 等角写像

再び，写像 (7.1) を考える。点 (a,b) で (7.2) が成り立つとする。点 $c=(a,b)$ を通る C^1 級曲線 $(x(t),y(t))$ $(-\epsilon<t<\epsilon)$, $c=(x(0),y(0))$, を (u,v) で写した曲線

$$(U(t),V(t))=(u(x(t),y(t)),v(x(t),y(t)))$$

の $d=(u(a,b),v(a,b))$ における接線ベクトルは $(U'(0),V'(0))$ で,

$$\begin{pmatrix} U'(0) \\ V'(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_x(a,b) & u_y(a,b) \\ v_x(a,b) & v_y(a,b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}.$$

もし，u と v が Cauchy-Riemann の方程式をみたせば次のようになる。

$$\begin{pmatrix} u_x(a,b) & u_y(a,b) \\ v_x(a,b) & v_y(a,b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_x(a,b) & -v_x(a,b) \\ v_x(a,b) & u_x(a,b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

$p=u_x(a,b)$, $q=v_x(a,b)$ とおくと仮定により $r=\sqrt{p^2+q^2}>0$.

$$\cos\theta=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}},\quad \sin\theta=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

により θ を定めると

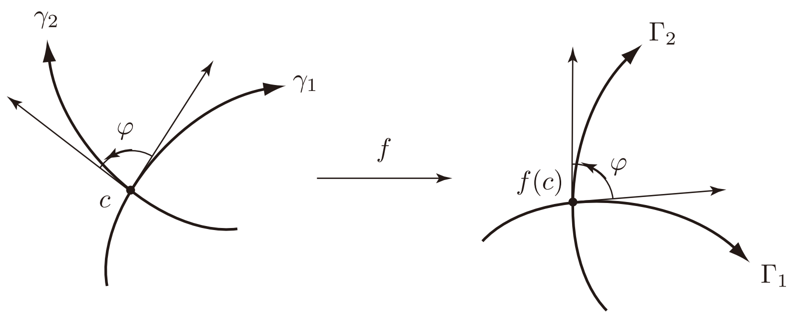
$$\begin{pmatrix} u_x(a,b) & -v_x(a,b) \\ \\ v_x(a,b) & u_x(a,b) \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \\ \sin & \cos\theta \end{pmatrix}$$

だから，(7.5) はベクトル $(x'(0),y'(0))$ を原点の回りに正方向に θ 回転して r 倍したものである。

複素平面で考えると，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ が正則写像で $f'(c)\neq 0$ ならば，点 c を通る C^1 級曲線 γ の像曲線 Γ の $f(c)$ における接ベクトルは，γ の c における接ベクトルを $\arg f'(c)$ だけ正方向に回転して $|f'(c)|$ 倍したものである。したがって，今，点 c で交わる C^1 級曲線 γ_1 と γ_2 があり，それらの c における接線ベクトルの間の角を φ とすると，像曲線 $\Gamma_1=f(\gamma_1)$, $\Gamma_2=f(\gamma_2)$ の $f(c)$ における接線ベクトル間の角も φ である。この角は向きも込めて等しい，すなわち，c における γ_1 の接線ベクトルを基点を中心に正方向に角 φ だけ回転して γ_2 の接線ベクトルの方向に重ね合わせられるならば，それらの像曲線 $\Gamma_1=f(\gamma_1)$, $\Gamma_2=f(\gamma_2)$ に対して，Γ_1 の $f(c)$ における接線ベクトルを基点を中心として正方向に角 φ だけ回転して Γ_2 の接線ベクトルの方向に重ね合わせられる。こうした観察から写像 $f(z)$ は c で等角であるという。

定義 7.1　領域 D から D' への 1 対 1[*8]かつ正則な関数 $f(z)$ は，すべての $z\in D$ において $f'(z)\neq 0$ であるとき，D から D' への**等角写像**と呼ばれる。

[*8] 複素関数論では「単葉」という言葉がよく使われる。



7.3　等角写像のいろいろ

例 7.1 （単位円板の等角同型）$\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ を単位円板とする。$a \in \mathbb{D}$ に対して

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

とおくと，φ_a は $\mathbb{D}$ からそれ自身への等角写像である。

証明. まず，$|z| < 1$ のとき，$|1 - \bar{a}z| \geq 1 - |a||z| > 0$ に注意する。

$$1 - |\varphi_a(z)| = 1 - \left|\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}\right|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2} > 0$$

ゆえ，φ_a は $\mathbb{D}$ をそれ自身に写す。

$$\varphi_a'(z) = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2}$$

より，すべての $z \in \mathbb{D}$ において φ_a は等角写像である。次に φ_a が $\mathbb{D}$ からそれ自身への全単射であることを示す。$z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ が $z_1 \neq z_2$ のとき，

$$\varphi_a(z_1) - \varphi_a(z_2) = \frac{(1 - |a|^2)(z_1 - z_2)}{(1 - \bar{a}z_1)(1 - \bar{a}z_2)}$$

より $\varphi_a(z_1) \neq \varphi_a(z_2)$. よって φ_a は単射。最後に $w \in \mathbb{D}$ に対して

$$w = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

を解いて

$$z = \frac{w + a}{1 + \bar{a}w}$$

すなわち, $z = \varphi_{-a}(w)$ であり，上のことから $z \in \mathbb{D}$. よって φ_a は全射である。 □

後に出てくる Schwarz の補題 (定理 14.4) を用いれば，単位円板からそれ自身への等角写像で $\varphi(a) = 0$ をみたすものは

$$\varphi(z) = e^{i\theta}\frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \tag{7.6}$$

（θ は実数）の形にかけることがわかる。

例 7.2 （Joukowski 変換）

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

とおく。$z = re^{i\theta}$ に対して

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$

したがって $r > 0, r \neq 0$ のとき，円 $|z| = r$ の $f(z)$ による像は楕円

$$\left(\frac{u}{\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)}\right)^2 + \left(\frac{v}{\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)}\right)^2 = 1$$

である。円 $|z| = 1$ の像は -1 と 1 を結ぶ線分である。次に $\theta \in (-\pi, \pi]$ を固定すると，半直線 $re^{i\theta}$ $(r > 0)$ の $f(z)$ による像は，$\theta \neq -\pi/2, 0, \pi/2, \pi$ のときは双曲線

$$\left(\frac{u}{\cos\theta}\right)^2 - \left(\frac{v}{\sin\theta}\right)^2 = 1.$$

$\theta = 0$ のときの像は, 実軸上の半直線 $\{x : x \geq 1\}$, $\theta = \pi$ のときは, 実軸上の半直線 $\{x : x \leq -1\}$, $\theta = \pm\pi/2$ のときは，虚軸である。点 z が円 $|z| = r$ や半直線 $\arg z = \theta$ を動くとき，$f(z)$ が楕円や双曲線などの上をどのように動くかを調べてほしい。

$f(z)$ を単位円板の上半部分 $D = \{z : |z| < 1, \mathrm{Im}\, z > 0\}$ に制限すると，f は D から上半平面 $\mathbb{H} = \{z : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ への等角写像である。

例 7.3 $\sin z$ は領域 $\left\{z : -\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Re}\,(z) < \dfrac{\pi}{2}, \mathrm{Im}\,(z) > 0\right\}$ から上半平面への等角写像である。

例 7.4 上半平面 $\mathbb{H} = \{z = x + iy : y > 0\}$ から頂角 2α の無限角領域

$$D = \{z = re^{i\theta} : 0 < \theta < 2\alpha\}$$

への等角写像 $f(z)$ で $f(i) = e^{i\alpha}$ となるのは

$$f(z) = e^{\frac{2\alpha}{\pi}\log z} \tag{7.7}$$

(ただし，$\log 1 = 0$) である。(7.7) の右辺を $z^{2\alpha/\pi}$ と書く。

7.4 練習問題

問題 7.1 $\mathbb{H} = \{z : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ を上半平面とする。$ad - bc > 0$ をみたす実数 a, b, c, d に対して

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

は $\mathbb{H}$ からそれ自身への等角写像であることを示せ。

8　線積分とグリーンの定理

8.1　線積分

8.1.1　曲線

xy 平面内の媒介変数

$$\phi(t) = (x(t), y(t)) \ (a \le t \le b) \tag{8.1}$$

をもつ曲線 C を考える。C は始点 $A = \phi(a)$ から終点 $B = \phi(b)$ への向きをもつする。

この章で扱う曲線は断らない限り**レギュラーな曲線**[*9]，すなわち，ϕ が閉区間 $[a, b]$ を含むある開区間上の C^1 級写像に拡張され，かつ

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 \ne 0 \ (a \le t \le b)$$

をみたすとする。

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

は曲線 C の長さである。曲線とはこのように実数の区間から xy 平面への写像 ϕ のことだが，その像も曲線と呼ぶことがある。それを図示するときは矢印で向きがわかるようにする。

媒介変数表示

$$\psi(t) = (x(a+b-t), y(a+b-t)) \ (a \le t \le b)$$

をもつ曲線を C の**逆向き曲線**といい，$-C$ で表す。

C_k $(k = 1, 2)$ はレギュラー曲線で，それぞれ係数表示 ϕ_k $(a_k \le t \le b_k)$ をもち，$\phi_1(b_1) = \phi_2(a_2)$ であるとする。このとき，

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_1(t) & a_1 \le t \le b_1 \\ \phi_2(t - b_1 + a_2) & b_1 \le t \le b_1 - a_2 + b_2 \end{cases}$$

を係数表示にもつ曲線を C_1 と C_2 の**和**といい，$C_1 + C_2$ で表す。また，n 個のレギュラー曲線 C_1, C_2,...,C_n があり，$k = 2, ..., n$ に対して C_{k-1} の終点と C_k の始点が同じであるとき，これらの和 $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_2$ が同様に定義される。C は**区分的にレギュラーな曲線**と呼ばれる。

8.1.2　線積分

$P(x, y)$ と $Q(x, y)$ を C を含む開集合 D 上の（実数値）連続関数とする。$P(x, y)$ の C に沿った x, y についての**線積分**を，それぞれ次で定める。

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y)\ dx &= \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t)\ dt, \\ \int_C Q(x, y)\ dy &= \int_a^b Q(x(t), y(t))y'(t)\ dt. \end{aligned} \tag{8.2}$$

[*9] 正則曲線と訳すことが多いが，holomorphic の意味での正則性と紛らわしいので，よい訳が見つかるまでこれで通す。

(10.1) を一まとめに次のように書く。

$$\int_C P(x,y)dx + \int_C Q(x,y)dy = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

C の逆向き曲線を $-C$ に対して，次が成り立つ。

$$\int_{-C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \tag{8.3}$$

区分的にレギュラー曲線 $C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ に対して，次が成り立つ。

$$\int_{C_1+C_2+\cdots+C_n} P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy. \tag{8.4}$$

注意 8.1　線積分

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

はパラメータの取り方に依らずに定まる。C を弧長パラメータ s(これは曲線 C から定まる) で表示したときの線積分の物理的意味を考えれば理解できる。次章の (9.3) 参照。

8.2　グリーンの定理

D を 2 つの連続関数 $f(x)$ と $g(x)$ のグラフで囲まれた xy-平面内の集合とする (下図左)。このような領域を (x について) 縦線型領域と呼ぶことにする：

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b, g(x) \le y \le f(x)\}$$

D の反時計回りの向き（正の向き）をもつ境界 ∂D は $C_1 + \Gamma_1 - C_2 + \Gamma_2$ と書ける。ここで

$$C_1 : (x, g(x)), \quad C_2 : (x, f(x)) \qquad (a \le x \le b).$$

Γ_1,Γ_2 は垂直線分または一点である（図 1 参照）（Γ_1 が一点であるときは，以下の考察において Γ_1 が関わるところは無視する。Γ_2 についても同様。）$P(x,y)$ を D を含むある開集合で C^1 級の関数とすると，Γ_1, Γ_2 上では x は一定だから，これらの上での線積分は 0 となり，

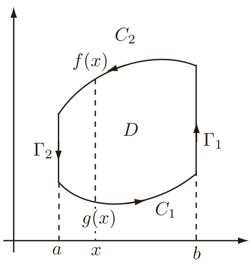
$$\begin{aligned}\int_{\partial D} P(x,y)\ dx &= \int_{C_1} P(x,y)\ dx - \int_{C_2} P(x,y)\ dx \\ &= -\int_a^b (P(x,f(x)) - P(x,g(x))\ dx = -\int_a^b \left[\int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\ dy\right] dx \\ &= -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\ dxdy \end{aligned} \tag{8.5}$$

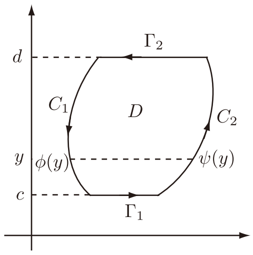
D を有限個の単純閉曲線で囲まれた閉領域とする。D の境界にある曲線は D を左手に見る向きをもつとする。D にいくつか垂直線分を書き込み D を縦線型領域 D_1, D_2,..., D_n に分解する。(8.5) により

$$-\int_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\ dxdy = -\sum_{k=1}^{n} \int_{D_k} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\ dxdy = \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial D_k} P(x,y)\ dx.$$

Γ を書き加えた垂直線分の一つとする。Γ の左に小領域 D_i，右に小領域 D_j があるとき，上式の右辺の線積分において ∂D_i 上の積分については Γ では下から上へと積分し，∂D_j 上の積分については Γ では上から下へと積分するので，これらの Γ 上の積分の値は互いに打ち消しあう。このことから右辺において書き加えた垂直線分上の積分値は消えてしまうので，この場合も次式を得る。

$$\int_{\partial D} P(x,y)\ dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\ dxdy \tag{8.6}$$





次に D を 2 つの連続関数 $\phi(y)$ と $\psi(y)$ のグラフで囲まれた xy-平面内の集合とする (上図右)。このような領域を (y について) 縦線型領域と呼ぶことにする:

$$D = \{(x,y) : c \le y \le d, \phi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

D の正に向きつけられた境界 ∂D は $-C_1 + \Gamma_1 + C_2 + \Gamma_2$ と書ける。ここで

$$C_1 : (\phi(y), y), \quad C_2 : (\psi(y), y) \qquad (c \le y \le d).$$

$Q(x,y)$ を D を含むある開集合で C^1 級の関数とすると，Γ_1, Γ_2 上では x は一定だから，これらの上での線積分は 0 となり，

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} Q(x,y)\ dy &= -\int_{C_1} Q(x,y)\ dy + \int_{C_2} Q(x,y)\ dy \\ &= \int_c^d (Q(\psi(y),y) - Q(\phi(y),y))\ dy = \int_c^d \left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\ dx\right] dy \\ &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\ dxdy \end{aligned} \tag{8.7}$$

D を有限個の単純閉曲線で囲まれた閉領域とする。境界の曲線の向きは先ほどと同じである。D にいくつか水平線分を書き込み D を縦線型領域 D_1, D_2,..., D_m に分解する。(8.7) により

$$\int_D \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\ dxdy = \sum_{k=1}^m \int_{D_k} \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\ dxdy = \sum_{k=1}^m \int_{\partial D_k} Q(x,y)\ dy.$$

Γ を書き加えた水平線分の一つとする。Γ の上に小領域 D_i，下に小領域 D_j があるとき，上式の右辺の線積分において ∂D_i 上の積分については Γ では左から右へと積分し，∂D_j 上の積分については Γ では右から左へと積分するので，これらの Γ 上の積分の値は互いに打ち消しあう。こ

のことから右辺において書き加えた水平線分上の積分値は消えてしまうので，この場合も次式を得る。

$$\int_{\partial D} Q(x,y)\ dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\ dxdy \tag{8.8}$$

以上をまとめて

定理 8.1 （Green の定理）D を有限個の単純閉曲線で囲まれた閉領域とする。$P(x,y)$, $Q(x,y)$ を D を含む開集合で C^1 級の関数 $P(x,y)$,$Q(x,y)$ に対して

$$\int_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right)\ dxdy \tag{8.9}$$

8.3 練習問題

問題 8.1 C を原点中心半径 1 の四分の一円 $\{(x,y) : x^2+y^2=1, x\geq 0, y\geq 0\}$ に $(1,0)$ から $(0,1)$ に向かう向きを与えたものとする。次の問いに答えよ。
(1) C の径数表示 $x(t)=1-t$, $y(t)=\sqrt{1-x(t)^2}=\sqrt{2t-t^2}$ $(0\leq t\leq 1)$ を用いて $\displaystyle\int_C xy\ dx$ を計算せよ。
(2) C の径数表示 $x(\theta)=\cos\theta$, $y(\theta)=\sin\theta$ $(0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2})$ を用いて $\displaystyle\int_C xy\ dx$ を計算せよ。

問題 8.2 次の線積分を曲線 C の適当な媒介変数を用いて計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_C ydx+2xdy,\quad C$ は $(1,0)$ から $(0,1)$ を結ぶ第 1 象限にある単位四半円の周,

(2) $\displaystyle\int_C x^2ydx-xy^2dy,\quad C$ は単位円周。C の向きは正の向きとする。

問題 8.3 次の線積分 (問題 8.2 と同じ) をグリーンの定理を応用して求めよ。

(1) $\displaystyle\int_C ydx+2xdy,\quad C$ は $(1,0)$ から $(0,1)$ を結ぶ第 1 象限にある単位四半円の周,

(2) $\displaystyle\int_C x^2ydx-xy^2dy,\quad C$ は単位円周。C の向きは正の向きとする。

問題 8.4 a,b は正の実数とする。楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の周に反時計回りの向きを与えたものを C とするとき，積分

$$\frac{1}{2}\int_C -ydx+xdy$$

を計算することによって，この楕円の内部の面積を求めよ。

9　2 次元のベクトル解析

9.1　ベクトル場

定義 9.1　xy-平面の領域 D の各点 (x,y) にベクトル $\boldsymbol{v}(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$ を対応させる写像 $\boldsymbol{v}:D\to\mathbb{R}^2$ を D 上の**ベクトル場**と呼ぶ。以下，$u(x,y)$, $v(x,y)$ は C^1 級関数とする。ここではベクトル場を流体の速度ベクトル場と考える。

定義 9.2　D 内の曲線 $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(a\le t\le b)$ がベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の流線であるとは,

$$x'(t)=u(x(t),y(t)),\quad y'(t)=v(x(t),y(t))$$

をみたすときにいう。

定義 9.3　ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して

$$\mathrm{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=(u,v)$$

をみたす関数 $f(x,y)$ が存在すれば，$f(x,y)$ を $\boldsymbol{v}$ の**ポテンシャル** (あるいは速度ポテンシャル) という。ベクトル $\boldsymbol{v}=(u,v)$ を正の向きに 90° 回転させてできるベクトル場 $^*\boldsymbol{v}=(-v,u)$ のポテンシャル $g(x,y)$ を $\boldsymbol{v}$ の**流れの関数**という。

曲線 $(x(t),y(t))$ がポテンシャル $f(x,y)$ の等高線，すなわち $f(x(t),y(t))=$ 定数 であるとき, t で微分すれば,

$$\mathrm{grad} f\cdot(x'(t),y'(t))=\boldsymbol{v}\cdot(x'(t),y'(t))=0$$

だから ($\cdot$ はベクトルの内積)，等高線は流れに常に直交している。また，流れの関数の等高線はつねに流れに沿っていることもわかる。

9.2　ベクトル場の発散・回転

D 内の C^1 級曲線 C を考え，C を弧長パラメータ s で表示する $(0\le s\le L)$. C 上の各点 $P(s)=(x(s),y(s))$ における接線ベクトル $\boldsymbol{r}=(x'(s),y'(s))$ は $|\boldsymbol{r}|=1$ をみたす。$\boldsymbol{r}$ に直角で右に向かう単位ベクトル[*10]は

$$\boldsymbol{n}=(y'(s),-x'(s))$$

で，$P(s)$ において

$$\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}.$$

$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds=\int_0^L\{u(x(s),y(s))y'(s)-v(x(s),y(s))x'(s)\}\,ds,$$

はベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が C を左から右に通過する**流量**を表す。

[*10] C が正の向きをもつ単純閉曲線ならば C が囲む領域に対する外法線単位ベクトル

C を正の向きをもつ単純閉曲線とすると

$$Q(C)=\int_C(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})ds \tag{9.1}$$

は，閉曲線 C を横切って内から外に流れ出る流量となる。また

$$\Gamma(C)=\int_C(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r})ds \tag{9.2}$$

は C に沿っての $\boldsymbol{v}$ の**循環**という[*11]。一般のパラメータ $(x(t),y(t))$ $(a\le t\le b)$ の場合は

$$s=\int_a^t\sqrt{x'(\tau)^2+y'(\tau)^2}\,d\tau,\qquad \frac{ds}{dt}=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$$

を用いて変数変換して，

$$Q(C)=\int_C -v(x,y)dx+u(x,y)dy,\qquad \Gamma(C)=\int_C u(x,y)dx+v(x,y)dy \tag{9.3}$$

である。点 $(x,y)\in D$ を含む長方形 $R=\{(x',y'):|x'-x|\le h,|y'-y|\le k\}$ を D に含まれる

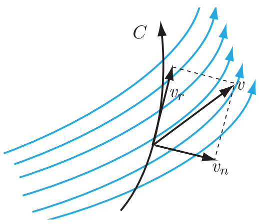


図 1　$\boldsymbol{v}_n=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$. $\boldsymbol{v}_r=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}$

ように取る。R の境界 C を通過する $\boldsymbol{v}$ の流量 $Q(C)$ と循環 $\Gamma(C)$ は

$$\begin{aligned}Q(C)&=\int_C(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})ds=\int_{C_1}\boldsymbol{v}\cdot(-\boldsymbol{e}_2)\;ds+\int_{C_2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_1\;ds+\int_{C_3}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_2\;ds+\int_{C_4}\boldsymbol{v}\cdot(-\boldsymbol{e}_1)\;ds\\&=\int_{-k}^{k}\{u(x+h,y+s)-u(x-h,y+s)\}\,ds\\&\qquad+\int_{-h}^{h}\{v(x+s,y+k)-v(x+s,y-k)\}\,ds.\\ \Gamma(C)&=\int_C(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r})ds=\int_{C_1}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_1\;ds+\int_{C_2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_2\;ds+\int_{C_3}\boldsymbol{v}\cdot(-\boldsymbol{e}_1)ds+\int_{C_4}\boldsymbol{v}\cdot(-\boldsymbol{e}_2)\;ds\\&=-\int_{-h}^{h}\{u(x+s,y+k)-u(x+s,y-k)\}\,ds\\&\qquad+\int_{-k}^{k}\{v(x+h,y+s)-v(x-h,y+s)\}\,ds.\end{aligned}$$

[*11] s を C の弧長パラメータのとき，ベクトル値関数 $\boldsymbol{v}(x,y)=(f(x,y),g(x,y))$ に対して

$$\int_C\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}ds=\int_0^L[-g(x(s),y(s))x'(s)+f(x(s),y(s))y'(s)]ds=\int_C -g(x,y)dx+f(x,y)dy,$$
$$\int_C\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}ds=\int_0^L[f(x(s),y(s))x'(s)+g(x(s),y(s))y'(s)]ds=\int_C f(x,y)dx+g(x,y)dy,$$

と記す習慣がある。右辺は従来の意味での線積分。

平均値の定理を用いれば $\theta_j,\ \vartheta_j \in (-1,1)$ $(j=1,2,3,4)$ が存在して

$$Q(C) = 4\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k) + \frac{\partial v}{\partial y}(x+\theta_3 h, y+\theta_4 k)\right)hk,$$
$$\Gamma(C) = 4\left(-\frac{\partial u}{\partial y}(x+\vartheta_1 h, y+\vartheta_2 k) + \frac{\partial v}{\partial x}(x+\vartheta_3 h, y+\vartheta_4 k)\right)hk,$$

これらを R の面積 $m(R) = 4hk$ で割ったものは R での "平均湧き出し面密度", "平均循環流面密度" とでも呼べる量である。

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{Q(C)}{m(R)}, \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Gamma(C)}{m(R)}. \tag{9.4}$$

ここで,

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \mathrm{rot}\boldsymbol{v} = -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{9.5}$$

をそれぞれ (x,y) における $\boldsymbol{v}$ の**発散**, **回転**という。微小面積 $dxdy$ を持つ領域に密度をかけた $\mathrm{div}\boldsymbol{v}\cdot dxdy$ が領域での湧き出し量を領域 D 全体で足し合わせたものが D 全体での湧き出し量

$$\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy.$$

一方，D の境界 C から流れ出る量は

$$Q(C) = \int_C -v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

だから，グリーンの定理

$$\int_C -v(x,y)dx + u(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy$$

が成り立つことが納得できるだろう。

補題 9.1 (ポアンカレ (Poincaré) の補題) $\Omega = \{(x,y) : |x-x_0| < M, |y-y_0| < N\}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{v} = (u,v)$ が $\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = 0$ をみたせば，$F_x = u,\ F_y = v$ をみたす Ω 上の関数 $F(x,y)$ が存在する。

証明. $a<b,\ c<d$ とし，$(a,c),\ (b,c),\ (a,d),\ (b,d)$ を頂点にもつ閉長方形 R が Ω に含まれているとする。R の辺に沿って (a,c) から (b,c) を経由して (c,d) にいたる折れ線を C_1, (a,c) から (a,d) を経由して (c,d) にいたる折れ線を C_2 とすると，$\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = 0$ ゆえ，グリーンの定理により

$$\int_{C_1} udx + vdy - \int_{C_2} udx + vdy = \iint_R (-u_y + v_x)dxdy = 0.$$

Ω の任意の点 (x,y) に対して C を有限個の水平および垂直線分からなる (x_0,y_0) から (x,y) を結ぶ折れ線とし

$$F(x,y) = \int_C udx + vdt$$

とおく。上の観察より，$F(x,y)$ の値は折れ線の選び方によらない。したがって，$[x,x+h]$ を (x,y) から $(x+h,y)$ を結ぶ水平線分とすると，

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to0} \frac{F(x+h,y) - F(x,y)}{h} = \lim_{h\to0} \int_{[x,x+h]} u(t,y)dt = u(x,y).$$

同様に $[y, y+k]$ を (x,y) から $(x, y+k)$ を結ぶ垂直線分とすると，

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \lim_{k\to 0}\frac{F(x,y+k)-F(x,y)}{k} = \lim_{k\to 0}\int_{[y,y+k]} v(x,t)dt = v(x,y).$$

9.3　ベクトル解析と正則関数

D を複素平面内の領域とし，ベクトル場 $\boldsymbol{v} = (u(x,y), v(x,y))$ に対して

$$f(z) = u(x,y) - iv(x,y) \qquad (z = x+iy)$$

とおく。($f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ でないことに注意。) このとき，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \iff \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-v)}{\partial y},$$
$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \iff \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(-v)}{\partial x}.$$

よって $\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \mathrm{rot}\boldsymbol{v} = 0$ と $f(z)$ に対してコーシー・リーマンの方程式が成り立つこと，したがって $f(z)$ が正則であることとは同値である。閉曲線 C が与えられたとき，(9.3) を変形して

$$Q(C) = \mathrm{Im}\left(\int_C f(z)\ dz\right), \quad \Gamma(C) = \mathrm{Re}\left(\int_C f(z)\ dz\right). \tag{9.6}$$

$f(z)$ が原始関数」$F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ をもつとき，$F'(z) = U_x + iV_x = V_y - iU_y$ だから

$$\mathrm{grad}U = (u,v) = \boldsymbol{v}, \quad \mathrm{grad}V = (-v,u) = {}^*v.$$

よって U と V はそれぞれ $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルと流れの関数になっている。$F(z)$ を v の**複素速度ポテンシャル**という。

例 9.1　複素速度ポテンシャルが $F(z) = Ue^{-i\alpha}z$ ($U > 0$, α は実数) である流れは実軸と角 α をなす方向に速度の大きさ U で流れる一様流である。

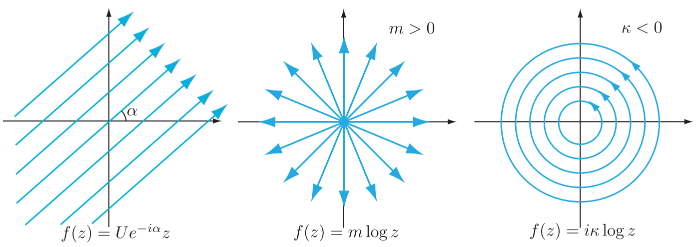


図 2　左から，一様流，わき出し，渦糸

例 9.2　複素速度ポテンシャルが $F(z) = m\log z$ (m は実数) である流れ。$F(z)$ は一価な関数ではないが流れ $F'(z) = m/z$ は定まる。極形式で考えると流線は θ=一定の原点から放射状に延びる半直線で等高線は r = 一定の円である。原点の回りを一周する閉曲線 C に対して $Q(C) = 2m\pi$, $\Gamma(C) = 0$. これは原点に強さ m の**わき出し**のある流れ ($m < 0$ のときは**吸い込み**のある流れ) である。

例 9.3　複素速度ポテンシャルが $F(z) = i\kappa \log z$ (κ は実数) である流れ。原点を中心とする円に沿う流れで，$\kappa < 0$ ならば反時計回りに，$\kappa > 0$ ならば時計回りに回転する。原点の回りを一周する閉曲線 C に対して $Q(C) = 0$, $\Gamma(C) = -2\kappa\pi$. これは原点に強さ κ の**渦糸**のある流れである。

9.4　練習問題

問題 9.1　領域 D で定義された C^2 級関数 $f(x,y)$ の**ラプラシアン** Δf を

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

で定める。次を示せ。

$$(1)\quad \mathrm{div}(\mathrm{grad} f) = \Delta f, \qquad (2)\quad \mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = 0.$$

問題 9.2　(Green の公式) D を有限個の区分的にレギュラーな閉曲線の和 Γ で囲まれた領域とし，$f(x,y)$ と $g(x,y)$ は D の閉包を含む開集合で定義された C^2 級関数とする。このとき，次を示せ。

$$\int_\Gamma g\frac{\partial f}{\partial n} ds = \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right) dxdy + \iint_D g\Delta f\ dxdy. \tag{9.7}$$

$$\int_\Gamma \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) ds = \iint_D (f\Delta g - g\Delta f)\, dxdy. \tag{9.8}$$

問題 9.3　(Poincaré の補題) $\mathbb{R}^2$ の領域 D が点 (x_0, y_0) について星型 (star-shaped) であるとは，任意の $(x,y) \in D$ と $t \in [0,1]$ に対して $((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty) \in D$ となるときにいう[*12]。

D を $(0,0)$ について星型の領域，$u(x,y)$, $v(x,y)$ は D で定義された C^2 級関数で

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{9.9}$$

をみたすとする。$(x,y) \in D$ に対して

$$F(x,y) = \int_0^1 [xu(tx,ty) + yv(tx,ty)]dt \tag{9.10}$$

とおくと，

$$\frac{\partial F}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = v$$

であることを示せ。

[*12] したがって，凸領域はそのすべての点について星型である。

10　コーシーの積分定理

10.1　複素線積分

複素平面内のレギュラーな有向曲線 C とは，複素平面を xy 平面と見なしたときにレギュラーな有向曲線のことである。すなわち，C の媒介変数表示

$$z(t) = x(t) + iy(t) \ (a \leq t \leq b) \tag{10.1}$$

で，$x(t)$, $y(t)$ は C^1 級で，$x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$ $(a \leq t \leq b)$ となるものが存在することである。

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $(z = x + iy)$ が C を含む領域で定義された連続関数であるとき

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\ dz &= \int_C (u(x,y) + iv(x,y))(dx + idy) \\ &= \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\left(\int_C v(x,y)dx + u(x,y)dy\right)\end{aligned}$$

と定義する。媒介変数表示を用いれば

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\ dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \\ &= \int_a^b \{u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t))\}\,dt \\ &\qquad + i\int_a^b \{v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t))\}\,dt.\end{aligned}$$

C の逆向き曲線やを $-C$ に対して，次が成り立つ。

$$\int_{-C} f(z)\ dz = -\int_C f(z)\ dz.$$

区分的にレギュラー曲線 $C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ に対して，次が成り立つ。

$$\int_{C_1+C_2+\cdots+C_n} f(z)\ dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\ dz.$$

注意　もし，C を含む領域上で $F'(z) = f(z)$ をみたす関数 $F(z)$ が存在すれば，

$$\frac{d}{dt}(F(z(t))) = f(z(t))z'(t)$$

だから，線積分は次で計算できる。

$$\int_C f(z)\ dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\ dt = F(b) - F(a)$$

次の積分を定義する。

$$\int_C f(z)\ |dz| = \int_a^b f(z(t))|z'(t)|\ dt.$$

補題 10.1　次が成り立つ。

$$\left|\int_C f(z)\ dz\right| \le \int_C |f(z)|\ |dz|. \tag{10.2}$$

とくに，C 上で $|f(z)| \le M$ ならば, $|z'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ だから

$$\left|\int_C f(z)\ dz\right| \le ML(C) \quad (L(C)\ \text{は}\ C\ \text{の長さ}). \tag{10.3}$$

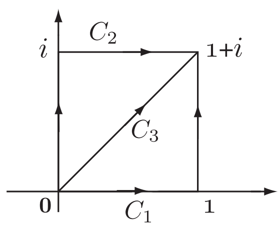
証明. $\theta = \arg \displaystyle\int_C f(z)\ dz$ とおくと

$$\begin{aligned}
\left|\int_C f(z)\ dz\right| &= e^{-i\theta}\int_C f(z)\ dz = \int_C e^{-i\theta} f(z)\ dz = \int_a^b e^{-i\theta} f(z(t))z'(t)\ dt \\
&= \int_a^b \mathrm{Re}\ \left(e^{-i\theta} f(z(t))z'(t)\right) dt + i\int_a^b \mathrm{Im}\ \left(e^{-i\theta} f(z(t))z'(t)\right) dt \\
&= \int_a^b \mathrm{Re}\ \left(e^{-i\theta} f(z(t))z'(t)\right) dt\ (\because \text{右辺は実数だから}) \\
&\le \int_a^b |e^{-i\theta}||f(z(t))||z'(t)|dt \\
&\le \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt = \int_C |f(z)||dz|.
\end{aligned}$$

□

例 10.1　C_1 を 0 から 1 への線分と 1 から $1+i$ への線分の和，C_2 を 0 から i への線分と 1 から $1+i$ への線分の和，C_3 を 0 から $1+i$ への線分とする。$k = 1, 2, 3$ に対して，次の積分を計算せよ。

$$(1)\ \int_{C_k} z^2\ dz, \qquad (2)\ \int_{C_k} z + \bar{z}\ dz.$$



解答. (1) $F(z) = z^3/3$ は $\mathbb{C}$ 全体で定義され，$F'(z) = z^2$ ゆえ，k は 1, 2, 3 のどれであっても

$$\int_{C_k} z^2\ dz = F(1+i) - F(0) = \frac{(1+i)^3}{3} = \frac{2}{3}(-1+i).$$

こちろん，定義に戻って線積分を計算してもよい。

(1-1) C_{11} を 0 から 1 を結ぶ線分，C_{12} を 1 から $1+i$ を結ぶ線分とする。それぞれの媒介変数表示は

$$C_{11} : z(t) = t\ (0 \le t \le 1), \quad C_{11} : z(t) = 1 + it\ (0 \le t \le 1).$$

よって

$$\int_{C_1} z^2\ dz = \int_{C_{11}} z^2\ dz + \int_{C_{12}} z^2\ dz = \int_0^1 t^2\ dt + \int_0^1 (1+it)^2 \cdot i \cdot dt$$
$$= \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{(1+it)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \left(\frac{(1+i)^3}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{(1+i)^3}{3}.$$

(1-2) C_{21} を 0 から i を結ぶ線分，C_{22} を i から $1+i$ を結ぶ線分とする。それぞれの媒介変数表示は

$$C_{11} : z(t) = it\ (0 \leq t \leq 1), \quad C_{11} : z(t) = t + i1\ (0 \leq t \leq 1).$$

よって

$$\int_{C_2} z^2\ dz = \int_{C_{21}} z^2\ dz + \int_{C_{22}} z^2\ dz = \int_0^1 (it)^2 \cdot i \cdot\ dt + \int_0^1 (t+i)^2 dt$$
$$= \left[\frac{(it)^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{(t+i)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{i^3}{3} + \left(\frac{(1+i)^3}{3} - \frac{i^3}{3}\right) = \frac{(1+i)^3}{3}.$$

(1-3) C_3 の媒介変数表示は

$$C_{11} : z(t) = t + it\ (0 \leq t \leq 1).$$

よって

$$\int_{C_3} z^2\ dz = \int_0^1 (t+it)^2 \cdot i \cdot\ dt$$
$$= \left[\frac{(t+it)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{(1+i)^3}{3}.$$

この場合は次が成り立つが，これは後述のコーシーの積分定理の帰結でもある。

$$\int_{C_1} z^2\ dz = \int_{C_2} z^2\ dz = \int_{C_3} z^2\ dz$$

(2) $f(z) = z + \bar{z}$ は正則関数でないので，$F'(z) = f(z)$ となる関数 $F(z)$ は存在しない。
(2-1) C_{11} と C_{12} は上と同じとする。

$$\int_{C_1} z + \bar{z}\ dz = \int_{C_{11}} z + \bar{z}\ dz + \int_{C_{12}} z + \bar{z}\ dz = \int_0^1 (t+t)\ dt + \int_0^1 ((1+it) + (1-it))i \cdot dt$$
$$= \int_0^1 2t\ dt + \int_0^1 2i \cdot dt = \left[t^2\right]_0^1 + [2ti]_0^1 = 1 + 2i.$$

(2-2) C_{21} と C_{22} は上と同じとする。

$$\int_{C_2} z + \bar{z}\ dz = \int_{C_{21}} z + \bar{z}\ dz + \int_{C_{22}} z + \bar{z}\ dz = \int_0^1 (it + (-it)) \cdot i \cdot\ dt + \int_0^1 ((t+i) + (t-i))dt$$
$$= \int_0^1 2t\ dt = \left[t^2\right]_0^1 = 1.$$

(2-3) C_3 の媒介変数表示は

$$C_{11} : z(t) = t + it\ (0 \leq t \leq 1).$$

よって

$$\int_{C_3} z+\bar{z}\ dz = \int_0^1 (t+it)+(t-it)\cdot(1+i)\cdot\ dt = \int_0^1 2t(1+i)\cdot\ dt$$
$$= \left[(1+i)t^2\right]_0^1 = 1+i.$$

例 10.2　C を点 a を中心に半径 r の円を正の向きに 1 周する曲線とするとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C (z-a)^n\ dz = \begin{cases} 0 & (n\text{ は }-1\text{ 以外の整数}) \\ 1 & (n=-1) \end{cases} \tag{10.4}$$

なぜならば，今，C の媒介係数表示を $z(\theta)=a+re^{i\theta}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ とすると

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C (z-a)^n\ dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^n ire^{i\theta}\ d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}\ d\theta$$
$$= \begin{cases} \left[\frac{r^{n+1}}{2(n+1)\pi i}e^{i(n+1)\theta}\right]_0^{2\pi} = 0 & (n\text{ は }-1\text{ 以外の整数}) \\ \left[\frac{\theta}{2\pi}\right]_0^{2\pi} = 1 & (n=-1) \end{cases}$$

10.2　コーシーの積分定理

定理 10.1　D は有限個の区分的にレギュラーな単純閉曲線の和 C で囲まれた領域とし，$f(z)$ は $D\cup C$ を含む領域で正則とすると

$$\int_C f(z)\ dz = 0 \tag{10.5}$$

証明. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ とおく。ここでは $u(x,y)$ と $v(x,y)$ が C^1 級であることを仮定する。グリーンの定理により

$$\int_C f(z)\ dz = \int_C (u+iv)(dx+idy)$$
$$= \int_C (udx-vdy) + i\int_C (vdx+udy)$$
$$= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\ dxdy + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\ dxdy$$
$$= 0+i0 = 0.\ (\because \text{Cauchy-Riemann の方程式})$$

□

系 10.1 （不定積分の存在）D を複素平面内の凸領域，$f(z)$ を D で正則な関数とする。このとき，D 上の正則関数 $F(z)$ で $F'(z)=f(z)$ をみたすものが存在する。

証明. D の 2 点 z と w に対して $C[z,w]$ を z から w への線分とする。仮定より $C[z,w]$ は D に含まれる。今，D の 1 点 a を固定する。$z\in D$ に対して

$$F(z) = \int_{C[a,z]} f(\zeta)\ d\zeta$$

とおく。ϵ を任意の正数とする。$\delta > 0$ を $|h| < \delta$ ならば $z+h \in D$ かつ $|f(z+h) - f(z)| < \epsilon$ となるよう十分小さく取る。閉曲線（三角形の周）$C[a,z]+C[z,z+h]-C[z,z+h]$ にコーシーの積分定理を用いることにより

$$\begin{aligned} F(z+h) &= \int_{C[a,z+h]} f(\zeta)\ d\zeta \\ &= \int_{C[a,z]} f(\zeta)\ d\zeta + \int_{C[z,z+h]} f(\zeta)\ d\zeta \\ &= F(z) + \int_{C[z,z+h]} f(\zeta)\ d\zeta. \end{aligned}$$

ここで $1 = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{C[z,z+h]} d\zeta$ を用いることにより

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{C[z,z+h]} (f(\zeta)-f(z))\ d\zeta\right| \\ &\le \frac{1}{|h|}\int_{C[z,z+h]} |f(\zeta)-f(z)|\ d|\zeta| \\ &< \frac{\epsilon}{|h|} L(C[z,z+h]) = \epsilon. \end{aligned}$$

したがって $h \to 0$ として，$F'(z) = f(z)$. □

補題 10.2　$f(z)$ は領域 D で正則な関数とする。D の各点 z で $F'(z) = f(z)$ をみたす $F(z)$ が存在すれば，点 a から点 b を結ぶ D 内の区分的にレギュラーな曲線 C に対して

$$F(b) - F(a) = \int_C f(z)\ dz \tag{10.6}$$

証明. $z(t)$ $(0 \le t \le 1)$ を C の媒介表示とし，$[0,1]$ の分点 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ があって，$z(t)$ は区間 $[t_{j-1}, t_j]$ $(j = 1, ..., n)$ で C^1 級であるとする。このとき，$h(t) = F(z(t))$ とおくと，分点を除き $h'(t) = F'(z(t))z'(t) = f(z(t))z'(t)$ が成り立つから，微分積分学の基本定理により

$$h(t_j) - h(t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(z(t))z'(t)\ dt.$$

よって

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}(h(t_j) - h(t_{j-1})) = \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(z(t))z'(t)\ dt = \int_C f(z)\ dz.$$

□

系 10.2　$f(z)$ は領域 D で正則な関数で，D の各点 z で $f'(z) = 0$ をみたせば，$f(z)$ は定数である。(上の補題の $F(z)$ に $f(z)$ を代入すればよい。)

11　コーシーの積分公式

11.1　コーシーの積分公式

定理 11.1 （コーシーの積分公式）$f(z)$ は領域 Ω で正則であるとする。D を有限個の区分的にレギュラーな単純閉曲線の和 C で囲まれた Ω の部分領域とし，C は D を左手に見る向きをもつとする。このとき，D の点 z に対して，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{11.1}$$

証明. $\bar{D}(z,r) \subset D$ となる閉円板を選び，その周を Γ_r とし，正（反時計回り）の向きを与える。$D_r = D \setminus \bar{D}(z,r)$ とおく。その境界 $C + (-\Gamma_r)$ は D_r を左手に見る向きをもつ。$f(\zeta)/(\zeta - z)$ は ζ の関数として D_r の閉包で正則だから，コーシーの積分定理により

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C+(-\Gamma_r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 0.$$

すなわち，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Γ_r の媒介変数表示 $\zeta = z + re^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ を用いて

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})d\theta. \tag{11.2}$$

任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を $|\zeta - z| < \delta$ のとき，$|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$ が成り立つように選んでおく。$r < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\,d\theta - f(z)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(z + re^{i\theta}) - f(z))\,d\theta\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta}) - f(z)|\,|d\theta| < \epsilon.\end{aligned}$$

ϵ は任意だから

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = f(z).$$

よって (11.1) が成り立つ。 □

「正則関数の円周上の平均値は円の中心における値と等しい」という (11.2) を再録しておこう。$f(z)$ が領域 D で正則であるとする。$\bar{D}(a,r) \subset D$ のとき，

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})d\theta. \tag{11.3}$$

11.2 正則関数の無限回微分可能性

定理 11.1 により，正則関数は無限回微分可能であること示される。

定理 11.2　領域 Ω で正則な関数 $f(z)$ は無限回微分可能で, 高次導関数も正則である。D を有限個の区分的にレギュラーな単純閉曲線の和 C で囲まれた Ω の部分領域とし，C は D を左手に見る向きをもつとする。このとき，D の点 z に対して，

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\ d\zeta. \tag{11.4}$$

証明. この節では $n = 1$ の場合を考える。$M = \sup\{|f(z)| : z \in C\}$ とおく。$\bar{D}(z, R_2) \subset D$ となる閉円板を選び，$0 < R_1 < R_2$ とする。$z + h \in D(z, R_1)$ をみたす h を考える。このとき，C 上の点 ζ に対して $|\zeta - z| > R_2 - R_1$, $|\zeta - z - h| > R_2 - R_1$ である。コーシーの積分公式により

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\left\{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z}\right) - \frac{1}{(\zeta - z)^2}\right\}d\zeta\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_C f(\zeta)\left(\frac{1}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} - \frac{1}{(\zeta - z)^2}\right)d\zeta\right| \\
&= \frac{|h|}{2\pi}\int_C |f(\zeta)|\left|\frac{1}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2}\right||d\zeta| \\
&= \frac{ML(C)}{2\pi(R_2 - R_1)^3}|h|.
\end{aligned}$$

したがって

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\ d\zeta.$$

11.3 最大値の定理

定理 11.3　$f(z)$ を領域 D で定義された正則関数とする。もし，$|f(z)|$ が D の内点で最大値をとれば，$f(z)$ は定数である。

証明. $M = \sup\{|f(z)| : z \in D\}$ とし，今，集合 $A = \{z \in D : |f(z)| = M\}$ は空でないとする。$|f(z)|$ は連続ゆえ，A は閉集合。$a \in A$ に対して，$R > 0$ を $\bar{D}(a, R) \subset D$ となるようにとる。任意の r $(0 < r < R)$ に対して，(11.3) により，

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})d\theta.$$

よって

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|d\theta.$$

これから

$$0 \leq \int_0^{2\pi}(|f(a + re^{i\theta})| - |f(a)|)d\theta.$$

ここで，$|f(a + re^{i\theta})| - |f(a)|$ は θ の連続関数で，常に $|f(a + re^{i\theta})| - |f(a)| \leq 0$ だから, すべての θ に対して $|f(a + re^{i\theta})| = |f(a)|$. すなわち，$|f(z)|$ は円 $|z - a| = r$ で定数 M をと

る。r は $0 < r < R$ の範囲で任意だから $D(a, R) \subset A$. したがって A は開集合でもあり，D の連結性から，$A = D$. つまり $|f(z)|$ は定数 M である。$M = 0$ のときは，$f(z) = 0$ である。$M > 0$ のとき，$f(z)$ の実部と虚部をそれぞれ $u(x,y)$, $v(x,y)$ $(z = x + iy)$ とおくと，$M^2 = u(x,y)^2 + v(x,y)^2$. Cauchy-Riemann の方程式により，

$$0 = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y},\ 0 = u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y}.$$

これから，$u_x(x,y) = v_y(x,y) = 0$, $u_y(x,y) = -v_x(x,y) = 0$ であり， よって $f(z)$ は定数である。 □

系 11.1　D を領域で，その閉包 $\bar{D}$ は有界であるとする。$f(z)$ が $\bar{D}$ で連続かつ D で正則な関数とする。$f(z)$ が定数でければ，$|f(z)|$ の最大値は境界上の点で取られる。

系 11.2　$f(z)$ を領域 D で定義された正則関数で，D のすべての点 z で $f(z) \neq 0$ とする。もし，$|f(z)|$ が D の内点で最小値をとれば，$f(z)$ は定数である。

11.4　補遺：正則関数の高次導関数の積分表示

n についての帰納法によって証明する。$n = 1$ のときは，すでに示した。n 階導関数について (11.1) が成り立つとする。目標は

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f^{(n)}(z+h) - f^{(n)}(z)}{h} - \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^{n+2}}d\zeta\right| = 0$$

を示すことである。帰納法の仮定より，これは次を示すことと同じである。

$$\lim_{h\to 0}\left|\int_C f(\zeta)\left\{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(\zeta-z-h)^{n+1}} - \frac{1}{(\zeta-z)^{n+1}}\right) - \frac{(n+1)}{(\zeta-z)^{n+2}}\right\}d\zeta\right| = 0. \tag{11.5}$$

M, R_1, R_2 は $n = 1$ のときの証明と同じとし，$|h| < R_1$ とする。$L_0 = \sup\{|\zeta - z| : \zeta \in C\}$, $L_1 = L_0 + R_1$ とおくと, $\zeta \in C$ に対して

$$|\zeta - z - h| \leq |\zeta - z| + |h| < L_1.$$

(11.5) の $\{\cdot\}$ の部分の絶対値を評価する。

$$\begin{aligned}
|\{\cdot\}| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(\zeta-z)^{n-k+1}(\zeta-z-h)^k - (\zeta-z-h)^{n+1}}{(\zeta-z-h)^{n+1}(\zeta-z)^{n+2}}\right| \\
&= \left|h\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\frac{(\zeta-z)^{n-k-l}(\zeta-z-h)^{k+l}}{(\zeta-z-h)^{n+1}(\zeta-z)^{n+2}}\right| \\
&= \left|h\sum_{m=0}^{n}(m+1)\frac{(\zeta-z)^{n-m}(\zeta-z-h)^m}{(\zeta-z-h)^{n+1}(\zeta-z)^{n+2}}\right| \\
&\leq \frac{(n+1)(n+2)L_1^n}{2(R_2-R_1)^{2n+3}}|h|.
\end{aligned}$$

よって，最後の値を $C_1|h|$ （C_1 は h に依らない定数）とおくと

$$\left|\int_C f(\zeta)\left\{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(\zeta-z-h)^{n+1}} - \frac{1}{(\zeta-z)^{n+1}}\right) - \frac{(n+1)}{(\zeta-z)^{n+2}}\right\}d\zeta\right| \leq C_1 L(C)|h|.$$

したがって (11.5) が成り立つ。 □

次の補題は後の章で用いるが，定理 11.2 の証明と似ているので，ここで取り上げておく。

補題 11.1　φ を区分的にレギュラーな単純閉曲線 C 上の連続関数とするとき，

$$f(z)=\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

は C の補集合 Ω で正則である。

証明. z を C の補集合 Ω の点とし, z から C までの距離を 2δ とする。このとき円板 $\mathbb{D}(z,\delta)\subset\Omega$. $M=\max\{|\varphi(\zeta)|:\zeta\in C\}$, L を C の長さとする。$w\in\mathbb{D}(z,\delta)$ のとき, 定理 11.2 の証明と同じように計算して

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z}-\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\right| &= \left|\int_C\frac{(w-z)\varphi(\zeta)}{(\zeta-w)(\zeta-z)^2}\,d\zeta\right|\\ &\le |w-z|\int_C\frac{|\varphi(\zeta)|}{|\zeta-w||\zeta-z|^2}\,|d\zeta|\\ &\le \frac{ML}{\delta^3}|w-z|.\end{aligned}$$

よって f は z で微分可能で

$$f'(z)=\lim_{w\to z}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}=\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta.$$

□

注：次のことも成り立つ。

$$f^{(n)}(z)=n!\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta\quad(n=1,2,3,...)$$

11.5　練習問題

問題 11.1　$f(z)$ を領域 D で定義された正則関数とする。もし，$\mathrm{Re}\,f(z)$ が D の内点で最大値をとれば，$f(z)$ は定数である。このことを証明せよ。

12 代数学の基本定理

12.1 Liouville の定理と代数学の基本定理

定義 12.1 複素平面全体で正則な関数を整関数 (entire function) という。

定理 12.1 （Liouville（リューヴィル）の定理）有界な整関数は定数である。

証明. $f(z)$ を整関数とし，すべての z で $|f(z)| < M$ が成り立つ定数 M があるとする。R を任意の正数，C を z 中心半径 R の円とすると

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z + Re^{i\theta})}{R}e^{-i\theta}d\theta.$$

したがって

$$|f'(z)| \le \frac{M}{R}.$$

$R \to \infty$ として $f'(z) = 0$ がわかる。したがって系 10.2 より $f(z)$ は定数である。 □

定理 12.2 （代数学の基本定理）$f(z)$ を非定数多項式

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

とする。ここで $n \ge 1$, $a_0, a_1, ..., a_n$ は複素数で，$a_n \ne 0$. このとき，$f(z)$ は零点，すなわち $f(a) = 0$ をみたす複素数 a をもつ。

証明. もし，$f(z)$ が零点をもたないならば，$g(z) = 1/f(z)$ は整関数である。

$$m = \max\left\{\frac{|a_0|}{|a_n|}, \frac{|a_1|}{|a_n|}, ..., \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}\right\}$$

とし，$R > \max\{1, 2mn\}$ をみたす R を選ぶと，$|z| > R$ のとき，$R < |z| < |z|^2 < \cdots < |z|^n$ ゆえ

$$\begin{aligned}|f(z)| &= |a_n||z|^n\left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|a_n||z|} - \cdots - \frac{|a_1|}{|a_n||z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|a_n||z|^n}\right)\\ &\ge |a_n|R^n\left(1 - \frac{nm}{R}\right) > \frac{|a_n|R^n}{2}.\end{aligned}$$

$g(z)$ は連続だから，$p = \max\{|g(z)| : |z| \le R\}$ とし，$M = \max\{p, 2/(|a_n|R^n)\}$ とおくと，複素平面全体で $|g(z)| \le M$. したがって Liouville の定理により，$g(z)$ は定数，よって $f(z)$ も定数となって矛盾である。 □

12.2 補遺–3 次方程式のカルダノによる解法

複素数が必要になったのは判別式が負である 2 次方程式の解を存在せしめるためであろう。その後，3 次方程式，4 次方程式についてもその解を表す公式が得られ，解が複素数であることがわかった。その後，一般の n 次方程式についても、その解が複素数の中に見つかることがわかり，その完全な証明がカール・フリードリッヒ・ガウスによって与えられた (1799 年)。ただし，

一般に 5 次以上の代数方程式は代数的には解くことはできない。つまり，方程式の係数から四則演算とベキ乗根をとる操作を有限回繰り返して解を求めることができない。

ここでは「代数学の基本定理」に関連した話題として三次方程式

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \tag{12.1}$$

の代数的解法 (カルダノ (Cardano) の解法) を紹介する。ここで，a_0, a_1, a_2, a_3 は複素数で $a_3 \neq 0$. まず両辺を a_3 で割ることにより $a_3 = 1$ と仮定してよい。$x = y + t$ とおくと

$$\begin{aligned}&(y+t)^3 + a_2(x+t)^2 + a_1(x+t) + a_0 \\ &\qquad = y^3 + (3t + a_2)y^2 + (3t^2 + 2a_2t + a_1)y + (t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0).\end{aligned}$$

よって $t = -a_2/3$ ととすると，上式は $y^3 + py + q$ の形になる。よって，今後は方程式

$$x^3 + px + q = 0 \tag{12.2}$$

を考えることにする。もし (12.2) が解 α, β, γ をもてば

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 + px + q$$

の左辺を展開して係数を比較すれば

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = p, \\ \alpha\beta\gamma = -q. \end{cases} \tag{12.3}$$

1 の立方根は

$$1,\ \omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

の 3 つで，$1 + \omega + \omega^2 = 0$ が成り立つ。今，u と v を未知数とし

$$\begin{cases} \alpha = u + v \\ \beta = \omega u + \omega^2 v \\ \gamma = \omega^2 u + \omega v \end{cases} \tag{12.4}$$

とおくと

$$\alpha + \beta + \gamma = (1 + \omega + \omega^2)(u + v) = 0.$$

$$\begin{aligned}\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha &= (u+v)(\omega u + \omega^2 v) + (\omega u + \omega^2 v)(\omega^2 u + \omega v) + (\omega^2 u + \omega v)(u + v) \\ &= (1 + \omega + \omega^2)(u^2 + v^2) + 3(\omega + \omega^2)uv \\ &= -3uv.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\beta\gamma &= (u+v)(\omega u + \omega^2 v)(\omega^2 u + \omega v) \\ &= u^3 + (\omega^2 + \omega + 1)(u^2v + uv^2) + v^3 \\ &= u^3 + v^3.\end{aligned}$$

すると (12.3) より

$$u^3 + v^3 = -q, \qquad u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

が成り立ち，u^3 と v^3 は 2 次方程式 $x^2+qx-\dfrac{p^3}{27}=0$ の解となる。

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3},\qquad v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

としてよい。立方根

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\qquad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

を $uv=-p/3$ となるように取れば,

$$\begin{cases}\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\\ \beta=\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\\ \gamma=\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\end{cases}\tag{12.5}$$

が (12.2) の解となる。

例 12.1　$x^3-15x-4=0$ を解く。$p=-15$, $q=-4$ ゆえ

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3=-121=(11i)^2,$$

$$-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}=2\pm 11i.$$

$u=\sqrt[3]{2+11i}$, $v=\sqrt[3]{2-11i}$ を $uv=5$ となるように取れば

$$\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i},\quad \sqrt[3]{2+11i}\omega+\sqrt[3]{2-11i}\omega^2,\quad \sqrt[3]{2+11i}\omega^2+\sqrt[3]{2-11i}\omega$$

が $x^3-15x-4=0$ の解となる。

実は,

$$(2+i)^3=2+11i,\quad (2-i)^3=2-11i,\quad (2+i)(2-i)=5$$

なので，$2+11i$ と $2-i$ の三乗根として $\sqrt[3]{2+11i}=2+i$, $\sqrt[3]{2-11i}=2-i$ を選べば,

$$4,\quad -2-\sqrt{3},\ -2+\sqrt{3}$$

が解であることがわかる。

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2&=\begin{vmatrix}1&1&1\\ \alpha&\beta&\gamma\\ \alpha^2&\beta^2&\gamma^2\end{vmatrix}^2 \qquad \text{(Vandermonde の行列式)}\\ &=\begin{vmatrix}1&1&1\\ \alpha&\beta&\gamma\\ \alpha^2&\beta^2&\gamma^2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&\alpha&\alpha^2\\ 1&\beta&\beta^2\\ 1&\gamma&\gamma^2\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}3&\alpha+\beta+\gamma&\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\\ \alpha+\beta+\gamma&\alpha^2+\beta^2+\gamma^2&\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2&\alpha^3+\beta^3+\gamma^3&\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\end{vmatrix}\end{aligned}\tag{12.6}$$

ここで (12.3) を用いると

$$
\begin{aligned}
\alpha+\beta+\gamma &= 0,\\
\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 &= (\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=-2p,\\
\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 &= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma=-3q,\\
\alpha^4+\beta^4+\gamma^4 &= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2+4\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=2p^2,
\end{aligned}
$$

よって (12.6) は

$$
\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & -3q \\ -2p & -3q & 2p^2 \end{vmatrix} = -4p^3-27q^2.
$$

$D=-4p^3-27q^2$ を 3 次方程式 (12.2) の判別式 (discriminant) という。$D=0$ ならば (12.2) は重根をもつ。

注意 12.1 (4 次方程式の解法) 4 次方程式 $x^4+px^2+qx+r=0$ のフェラーリ (Ferrari) の解法を紹介する。未知数 a を導入して，この方程式を

$$
(x^2+a)^2=(2a-p)x^2-qy+(a^2-r)
$$

と変形する。右辺を $(bx+c)^2$ の形に表すことができれば，$x^2+a=\pm(bx+c)$ を解くことにより方程式の解が見つかる。そのためには右辺の判別式が

$$
q^2-4(2a-p)(a^2-r)=0
$$

となるように a を求めればよい。これは a の 3 次式だから，代数的に求められる。

12.3 練習問題

問題 12.1 $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{5}}$ とおくと，$x^5-1=0$ の解は $1, \zeta, \zeta^2, \bar{\zeta}, \bar{\zeta}^2$ である。このことを用いて次の問いに答えよ。

(1) 次を示せ。

$$
\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2},\quad \cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{4}.
$$

(2) 次を示せ。

$$
\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4},\quad \cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}.
$$

(3) 次を示せ。

$$
\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4},\quad \cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}.
$$

(4) 方程式 $x^5-1=0$ を代数的に解け。

問題 12.2 方程式 $x^3+6x^2+3x+2=0$ を解け。

13　整級数

13.1　級数の収束

複素数 $a_n (n = 1, 2, ...)$ を項にもつ級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{13.1}$$

を考える。

定義 13.1　部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$ が $n \to \infty$ のとき，値 α に収束するとき，級数 (13.1) は α に収束するといい

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

と記す。級数は収束するとは，それがある値に収束することである。

定理 13.1　(1) 任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある番号 N が存在して $m > n > N$ のとき，

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_n \right| < \epsilon$$

であれば，$\{S_n\}$ がコーシー列だから，級数 (13.1) は収束する。
(2) 非負値を項にもつ級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

が収束するならば，級数 (13.1) は収束する。（このとき，級数 (13.1) は**絶対収束する**という。）

例 13.1

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots .$$

部分和は有限等比数列で

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

となるので，$|z| < 1$ のとき，S_n は収束する。

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

13.2　一様収束

集合 $K \subset \mathbb{C}$ で定義された (複素数値) 関数 $f(z)$, $g(z)$ に対して

$$\|f - g\|_K = \sup_{z \in K} |f(z) - g(z)|$$

を定める。

定義 13.2　(1) 集合 K で定義された関数列 $\{f_n(z)\}$ が関数 $f(z)$ に**一様収束する**とは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある N が存在して，$n \geq N$ ならば $\|f - f_n\| < \epsilon$ が成り立つときにいう。
(2) 領域 $D \subset \mathbb{C}$ で定義された関数列 $\{f_n(z)\}$ が関数 $f(z)$ に**局所一様収束する**とは，D の任意のコンパクト部分集合 K 上 $\{f_n(z)\}$ が関数 $f(z)$ に一様収束するときにいう。

例 13.2　単位円板 $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ 上，$f_n(z) = z^n$ は $f(z) = 0$ に局所一様収束する。ただし，この収束は一様収束ではない。

定理 13.2　$\{f_n(z)\}$ がある関数 $f(z)$ に一様収束するための必要十分条件は，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある N が存在して，$m > n \geq N$ ならば $\|f_m - f_n\| < \epsilon$ が成り立つことである。

13.3　整級数の収束半径

点 a を中心に展開された整級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{13.2}$$

を考える。ここで c_n $(n = 0, 1, ...)$ は複素数である。

定理 13.3　整級数 (13.2) が $z_0 (\neq a)$ で収束すれば，$|z-a| < |z_0 - a|$ をみたす任意の z において (13.2) は絶対収束する。また，$0 < r < 1$ のとき，(13.2) は円板 $\mathbb{D}(a, r|z_0 - a|)$ で一様収束する。

証明. 仮定により，$\lim_{n\to\infty} |c_n (z_0 - a)^n| = 0$ が成り立つので，ある整数 M があって

$$|c_n (z_0 - a)^n| < M \ (n = 0, 1, 2, ...).$$

$|z-a| < |z_0 - a|$ のとき，

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n (z-a)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n (z_0 - a)^n| \left| \frac{z-a}{z_0 - a} \right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z-a}{z_0 - a} \right|^n .$$

$|z-a|/|z_0 - z| < 1$ より，上式の右辺は収束する。よって (13.2) は絶対収束。また $|z-a| \leq r|z_0 - a|$ ならば，上式右辺は z によらない $M \sum_{n=0}^{\infty} r^n$ で置きかえられるので一様収束が従う。□

定理 13.3 より，ρ $(0 \leq \rho \leq \infty)$ を $\rho = \sup\{|z-a| : (13.2)$ は z で収束 $\}$ で定めると

- $|z-a| < \rho$ ならば，(13.2) は絶対収束。
- $|z-a| > \rho$ ならば，(13.2) は発散。

定義 13.3　この ρ を整級数 (13.2) の**収束半径**という。

注意 13.1　$|z-a| = \rho$ をみたす z においては収束することも発散することもあり得る。例えば，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

は $z = 1$ で発散，$z = -1$ で収束である。（したがって，この整級数の収束半径は 1.）

13.4　収束半径の求め方

定理 13.4　次の極限が存在すれば（$+\infty$ に発散する場合も含める），それは (13.2) の収束半径に一致する。

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}, \qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

証明. (1) $R=\lim_{n\to\infty}|c_n|/|c_{n+1}|$ とおく。$0<R<\infty$ の場合を考える。$0<r<R$ とする。このとき，ある番号 N があって，$n>N$ ならば

$$r<\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}\ \text{したがって}\quad |c_{n+1}|<\frac{|c_n|}{r}.$$

これから, $m=1,2,...$ に対して

$$|c_{N+m}|<\frac{|c_{N+m-1}|}{r}<\frac{|c_{N+m-2}|}{r^2}<\cdots<\frac{|c_N|}{r^m}.$$

よって $|z-a|<r$ のとき,

$$\sum_{m=1}^{\infty}|c_{N+m}||z-a|^{N+m}<|z-a|^N|c_N|\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^m$$

は収束，よって (13.2) も収束する。$r<R$ は任意ゆえ，$|z-a|<R$ のとき，(13.2) は収束する。

次に $R<r$ とする。ある N があって，$c_N\neq 0$ かつ $n>N$ ならば

$$r>\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}\quad\text{したがって}\quad |c_{n+1}|>\frac{|c_n|}{r}.$$

これから, $m=1,2,...$ に対して

$$|c_{N+m}|>\frac{|c_{N+m-1}|}{r}>\frac{|c_{N+m-2}|}{r^2}>\cdots>\frac{|c_N|}{r^m}.$$

$|z-a|>r$ のとき

$$|c_{N+m}(z-a)^{N+m}|\geq|z-a|^N|c_N|\left|\frac{z-a}{r}\right|^m$$

より，$\{c_n(z-a)^n\}$ は非有界である。収束級数の項は 0 に収束するで，(13.2) は発散でなければいけない。$r>R$ は任意ゆえ，$|z-a|>R$ のとき，(13.2) は発散する。

(2) は次の定理に含まれるので省略する。 □

定理 13.5　(Cauchy-Hadamard の定理)　整級数 (13.2) の収束半径は次式で求められる。

$$\rho=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{13.3}$$

ただし $1/0=\infty$ とする。

証明　(13.3) の右辺を R とおく。$0 < R < \infty$ の場合を考える。
(1) $|z-a| < R$ とする。r を $|z-a| < r < R$ をみたすようにとると，$r^{-1} > R^{-1}$ ゆえ，ある番号 N が存在して, $n > N$ ならば

$$\frac{1}{r} > \sqrt[n]{|c_n|} \text{ したがって } \frac{1}{r^n} > |c_n|.$$

このとき，$|z-a|/r < 1$ ゆえ

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n||z-a|^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{|z-a|}{r}\right)^n$$

の右辺は収束，よって (13.2) は収束。
(2) $|z-a| > R$ とする。$|z-a| > r > R$ をみたすように r をとると，$r^{-1} < R^{-1}$ ゆえ，$r^{-1} < \sqrt[n]{|c_n|}$ をみたす n が無限個存在する。この n について

$$|c_n||z-a|^n > \left(\frac{|z-a|}{r}\right)^n$$

だから $\{c_n(z-a)^n\}$ は非有界である。よって (13.2) は発散する。 □

例 13.3　$a_0 = a_1$ と漸化式 $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ で定まる数列

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots$$

をフィボナッチ (Fibonacci) 数列という。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

を考える。帰納的に $a_n \leq 2^{n-1}$ $(n \geq 1)$ が示されるから $f(z)$ は $|z| < 1/2$ のとき収束する。

$$\begin{array}{rclcccccccc}
f(z) & = & 1 & + & z & + & a_2 z^2 & + & a_3 z^3 & + & \cdots \\
zf(z) & = & & & z & + & a_1 z^2 & + & a_2 z^3 & + & \cdots \\
z^2 f(z) & = & & & & + & a_0 z^2 & + & a_1 z^3 & + & \cdots
\end{array}$$

と漸化式より，$|z| < 1/2$ において $f(z) = (1-z-z^2)^{-1}$ (問題 13.1 (1) 参照). $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ と $\beta = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ を $z^2 + z - 1 = 0$ の解とすると

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1-z-z^2} = \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{\beta-z} - \frac{1}{\alpha-z}\right) \\
&= \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{\beta^{n+1}}\right) - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{\alpha^{n+1}}\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})}{\sqrt{5}} z^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) z^n.
\end{aligned}$$

したがって

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

実際の $f(z)$ の収束半径は $|\beta|>|\alpha|$ により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}\right|=\frac{1}{|\beta|}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

13.5 練習問題

問題 13.1　級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ がそれぞれ a と b に収束するとき，次の問いに答えよ。

(1) 定数 α,β に対して $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$ は $\alpha a+\beta b$ に収束することを示せ。

(2) $c_n=a_nb_0+a_{n-1}b_1+\cdots+a_1b_{n-1}+a_0b_n$ とおくとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ が絶対収束すれば，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ は ab に収束することを示せ。

問題 13.2　整級数

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots$$

は収束半径 ∞ をもち，複素平面全体で定義された関数 (指数関数) を表す。次を示せ。

$$E(z)E(w)=E(z+w).$$

問題 13.3　数列 $\{a_n\}$ $(a_n\geq 0)$ は正の極限値 $a=\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n>0$ をもつとする。このとき，数列 $\{b_n\}$ $(b_n\geq 0)$ に対して、次が成り立つことを示せ。

$$\limsup_{n\to\infty}a_nb_n=a\limsup_{n\to\infty}b_n$$

問題 13.4　(1)　$n=1,2,...$ に対して次を示せ。

$$1+2z+3z^2+\cdots+nz^{n-1}=\frac{1-(n+1)z^n+nz^{n+1}}{(1-z)^2}$$

(2)　$|z|<1$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=\frac{1}{(1-z)^2}$ を示せ。

問題 13.5 （収束半径）次の整級数の収束半径を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^nn^2}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n!}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{4^n}$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$

14 整級数の性質

14.1 整級数の微分

整級数 (13.2) が正（無限大の場合も含む）の収束半径 ρ をもてば，それは円板 $\mathbb{D}(a,\rho)$ で関数 $f(z)$ を与える。この整級数は任意の $r<\rho$ に対して，$\mathbb{D}(a,r)$ 上一様収束するから，$f(z)$ は連続関数であるが，さらに次のことが成り立つ。

定理 14.1　$f(z)$ は $\mathbb{D}(a,\rho)$ で正則であり，

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}(z-a)^n. \tag{14.1}$$

証明. (14.1) の右辺の整級数の収束半径を計算すると（問題 13.3 参照）

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}.$$

よって (14.1) の右辺の整級数は $\mathbb{D}(a,\rho)$ で収束する。これを $g(z)$ で表す。$z\in\mathbb{D}(a,\rho)$ のとき

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-g(z)\right|=0$$

が成り立つことを示す。$|z-a|<R$ となる $R<\rho$ を選ぶ。h は 0 に近づけるので，$|z-a|+|h|<R$ としてよい。$z-a$ をあらためて z とおいて考えることにより，$a=0$ と仮定してよい。$f(z)$, $f(z+h)$ と $g(z)$ を表す級数は収束するので

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-g(z)\right|&\le\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\left|\frac{(z+h)^n-z^n}{h}-nz^{n-1}\right|\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|c_n|}{|h|}\left|\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}z^{n-k}h^{k-1}\right|\\&\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|c_n|}{|h|}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|z|^{n-k}|h|^{k-1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\left(\frac{(|z|+|h|)^n-|z|^n}{|h|}-n|z|^{n-1}\right)\end{aligned}$$

$\{|c_n|R^n\}$ は有界だから，$|c_n|R^n<M$ $(n=1,2,...)$ とすると，上式の右辺から続けて

$$\begin{aligned}&=M\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{|h|}\left(\left(\frac{|z|+|h|}{R}\right)^n-\left(\frac{|z|}{R}\right)^n\right)-\frac{n}{R}\left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-1}\right)\\&=M\left(\frac{1}{|h|}\left(\frac{R}{R-(|z|+|h|)}-\frac{R}{R-|z|}\right)-\frac{R}{(R-|z|)^2}\right)\\&=MR\left(\frac{1}{(R-|z|-|h|)(R-|z|)}-\frac{1}{(R-|z|)^2}\right)\end{aligned}$$

最後の項は $h\to 0$ のとき 0 に収束する。 □

14.2 Morera の定理

Morera(モレラ) の定理はコーシーの積分定理の逆と見ることができる。

定理 14.2　$f(z)$ は領域 D で連続で，D に含まれる任意の区分的にレギュラーな閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z)\ dz = 0 \tag{14.2}$$

ならば，$f(z)$ は D で正則である。

証明. D の点 z_0 を一つ固定する。$z \in D$ に対して，z_0 から z を結ぶ D 内の区分的にレギュラーな曲線 C を一つ選んで

$$F(z) = \int_C f(\zeta)\ d\zeta.$$

を定める。C' を z_0 から z を結ぶ D 内の区分的にレギュラーな曲線とすると，(14.5) より

$$\int_C f(\zeta)\ d\zeta - \int_{C'} f(\zeta)\ d\zeta = \int_{C-C'} f(\zeta)\ d\zeta = 0.$$

したがって，$F(z)$ の値は C の取り方によらずに定まる。$z \in D$ に対して $r > 0$ を $\bar{\mathbb{D}}(z, r) \subset D$ となるようにとる。任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ を $|h| < \delta$ ならば $|f(z+h) - f(z)| < \epsilon$ となるように選ぶと，$|h| < \delta$ に対して，z から $z+h$ への線分 $C[z, z+h]$ の媒介変数表示を $z + th$ $(0 \leq t \leq 1)$ とすると，

$$F(z+h) = F(z) + \int_{C[z,z+h]} f(\zeta)\ d\zeta = \int_0^1 f(z+th)hdt.$$

したがって

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \int_0^1 |f(z+th) - f(z)|\ dt < \epsilon.$$

だから，$F(z)$ は D で正則で $F'(z) = f(z)$. 定理 11.4 により，$f(z)$ も D で正則である。 □

14.3 整級数の積分

収束半径 $\rho > 0$ をもつ整級数 (13.2) が $D = \mathbb{D}(a, \rho)$ で定める関数を $f(z)$ とおく。$f_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k (z-a)^k$ とおくと，定理 13.3 より，任意の r $(0 < r < \rho)$ に対して $\mathbb{D}(a, r)$ 上で $f_n(z)$ は $f(z)$ に一様収束する。したがって D 内の任意の任意の区分的にレギュラーな閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z)\ dz = \lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)\ dz = 0.$$

このことと Morera の定理からも $f(z)$ が D で正則であることがわかる。Morera の定理の証明と同じように，$z \in D$ に対して，a から z を結ぶ D 内の区分的にレギュラーな曲線 C を選んで

$$F(z) = \int_C f(\zeta)\ d\zeta$$

とおくと $F(z)$ は $f(z)$ の原始関数で，C 上 $f_n(\zeta)$ は $f(\zeta)$ に一様収束するから

$$F(z) = \lim_{n\to\infty}\int_C f_n(\zeta)\,d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{n-1}}{n}(z-a)^n.$$

よって次の整級数の項別積分が成り立つ。

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{n-1}}{n}(z-a)^n. \tag{14.3}$$

右辺に現れる整級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{n-1}}{n}(z-a)^n \tag{14.4}$$

は

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|c_{n-1}|}{n}} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_{n-1}|} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$$

だから，(13.2) と同じ収束半径をもつ。

14.4 テイラー展開

コーシーの積分表示から示されるように正則関数は，その定義域で無限回微分であるが，もっと強く定義域の各点のまわりでテイラー展開可能であることがわかる。

定理 14.3 f は領域 D で正則とする。a を D の点とし，点 a から D の境界との距離を R とおくと，任意の正数 $r < R$ に対し，f は円板 $\mathbb{D}(a,r)$ において整級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \tag{14.5}$$

に展開される。

証明. $|z-a| < r$ のとき，コーシーの積分公式により

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{\kappa(a,r)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \int_{\kappa(a,r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)-(z-a)}\,d\zeta = \int_{\kappa(a,r)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}\right)\,d\zeta \\ &= \int_{\kappa(a,r)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n\right)\,d\zeta \qquad \left(\because \left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| = \frac{|z-a|}{r} < 1\right). \end{aligned}$$

ここで $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$ は円 $\kappa(a,r)$ 上一様収束するから

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\kappa(a,r)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\right)(z-a)^n$$

□

定理 14.4　(Schwarz の補題) $f(z)$ を単位円板 $\mathbb{D}$ 上の正則関数で，$f(0)=0$ かつ $\mathbb{D}$ のすべての点 z で $|f(z)|\leq 1$ であるとする。このとき，

$$|f(z)|\leq |z| \tag{14.6}$$

が成り立つ。もし $\mathbb{D}$ の 1 点 $z_0(\neq 0)$ において $|f(z_0)|=|z_0|$ あるいは $|f'(0)|=1$ であれば，ある実数 θ が存在して

$$f(z)=e^{i\theta}z.$$

証明. 任意の r $(0<r<1)$ に対して $g_r(z)=f(rz)/z$ とおく。$f(z)$ のマクローリン展開は $f(z)=a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\dots$ の形をしているので

$$g_r(z)=r(a_1+a_2rz+a_3r^2z^2\cdots)$$

であり，$g_r(0)=ra_1$ とおけば，$g_r(z)$ は単位円板 $\mathbb{D}$ で正則な関数となる。さらに $g_r(z)$ は閉単位円板で連続である。$|z|=1$ のとき，$|g_r(z)|\leq 1$. よって最大値の原理により $\mathbb{D}$ 上で $|g_r(z)|\leq 1$. すなわち $|f(rz)|\leq|z|$. $r\to 1$ として $|f(z)|\leq|z|$.

$g(z)=f(z)/z$ は $g(0)=f'(0)$ とおくと $\mathbb{D}$ で正則な関数で $|g(z)|=|f(z)/z|\leq 1$. もし，ある $z_0\in\mathbb{D}$ で $|g(z_0)|=1$ ならば，最大値の原理より $c=g(z)$ は定数である。z に z_0 を代入して $|c|=1$ を得る。 □

14.5　練習問題

問題 14.1　次の不等式を示せ。

$$|e^z-1|\leq e^{|z|}-1.$$

問題 14.2　単位円板 $\mathbb{D}$ からそれ自身への等角写像 φ で $\varphi(a)=0$ をみたすものは

$$\varphi(z)=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \tag{14.7}$$

（θ は実数）の形にかけることを示せ。(ヒント:

$$h(z)=\frac{z+a}{1+\bar{a}z}$$

とし，$f(z)=\varphi(h(z))$ に Schwarz の補題を応用せよ。)

問題 14.3　(問題 13.4 再録) $k=0,1,2,..$ のとき，次を示せ。

$$|z|<1 \text{ のとき，}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}z^n=\frac{1}{(1-z)^{k+1}}.$$

15　ローラン展開と留数

15.1　ローラン展開

$D = \{z : R_1 < |z-a| < R_2\}$ $(0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty)$ とする。$f(z)$ を $\bar{D}$ を含む領域で正則であるとすると，次の (15.10) のように**ローラン** (Laurent) **級数**に展開できる。

定理 15.1　(ローラン展開) $f(z)$ は D においては絶対かつ局所一様に収束する級数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{15.1}$$

に一意的に展開できる。$R_1 < r < R_2$ とすると

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{15.2}$$

($\kappa(a,r)$ は a 中心半径 r の円周に正の向きを与えたもの。)

証明. $R_1 < r_1 < r < r_2 < R_2$ とする。$A = \{z : r_1 < |z-a| < r_2\}$ で (15.10) が成り立ち，かつ，そこで右辺の級数が絶対かつ一様収束することを示す。$R_1 < \rho_1 < r_1$, $r_2 < \rho_2 < R_2$ とし，正の向きをもつ 2 つの円 $C_1 = \{z : |z-a| = \rho_1\}$, $C_2 = \{z : |z-a| = \rho_2\}$ を考える。Cauchy の積分公式により

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = -I_1 + I_2.$$

積分 I_2 について。

$$\begin{aligned}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)-(z-a)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}} \\ &= \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n \qquad \left(\because \left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1\right).\end{aligned}$$

$m = \sup\{|f(z)| : z \in A\}$ とおくと, 上式右辺の級数の絶対級数は収束する優級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_2^n}{\rho_2^{n+1}}$ をもつので絶対一様収束する。したがって

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-a} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right)(z-a)^n.$$

右辺の級数は A で絶対一様収束する。
積分 I_1 について。

$$\begin{aligned}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= -\frac{f(\zeta)}{(z-a)-(\zeta-a)} = -\frac{f(\zeta)}{z-a}\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}} \\ &= -\frac{f(\zeta)}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n \qquad \left(\because \left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right| < 1\right).\end{aligned}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta &= -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(\zeta)(\zeta-a)^n d\zeta\right)(z-a)^{-n-1} \\
&= -\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right)(z-a)^n.
\end{aligned}
$$

右辺の級数は A で絶対一様収束する。

$f(\zeta)(\zeta-a)^{-n-1}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ は $\{\zeta : R_1<|\zeta-a|<R_2\}$ で正則だから,

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{C_j}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta, \qquad j=1,2.
$$

したがって (15.2) で c_n を定めると，級数展開 (15.10) が成り立つ。

一意性の証明. D において絶対かつ一様に収束する級数によって (15.10) のように書けたとする。

$$
f_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n(z-a)^n
$$

とおくと，$R_1<r<R_2$ のとき, $N>|n|$ ならば

$$
c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\left(\sum_{k=-N}^{N} c_k(\zeta-a)^k\right)\frac{1}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa(a,r)}\frac{f_N(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta.
$$

$\kappa(a,r)$ 上一様に $f_N(\zeta)$ は $f(\zeta)$ に収束するので $N\to\infty$ とすれば c_n は (15.2) で表される。 □

例 15.1　$f(z)=\dfrac{1}{z^2-z-2}$ とおく。$f(z)$ を原点を中心として，次の領域でそれぞれローラン展開する。

$$
(1)\quad \{z : |z|<1\} \qquad (2)\quad \{z : 1<|z|<2\} \qquad (3)\quad \{z : 2<|z|\}
$$

部分分数分解により

$$
f(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+1}\right).
$$

(1) $|z|<1$ のとき，$|z|/2<1$ でもあるので

$$
\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{3}\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} - \frac{1}{3}\frac{1}{z+1} = -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n 2^{n+1}-1}{3\cdot 2^{n+1}}\right)z^n.
\end{aligned}
$$

(2) $1<|z|<2$ のとき，$1/|z|<1$, $|z|/2<1$ ゆえ

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{3}\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} - \frac{1}{3z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3\cdot 2^{n+1}}\right)z^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3}\frac{1}{z^n}.
\end{aligned}
$$

(3) $|z| > 2$ のとき，$1/|z| < 2/|z| < 1$ ゆえ

$$f(z) = \frac{1}{3}\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} - \frac{1}{3z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z}\left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}+(-1)^n}{3}\frac{1}{z^n}.$$

例 15.2　$f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ を原点を中心として，領域 $\{z : |z| > 0\}$ でローラン展開する。
$\sin z$ のマクローリン展開を用いれば，ただちに

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n}$$

がわかる。

15.2　孤立特異点と留数定理

定義 15.1　$f(z)$ が $D^*(a,r) = \{z : 0 < |z-a| < r\}$ で正則であるとき，a を $f(z)$ の**孤立特異点**という。

$D^*(a,r)$ における $f(z)$ のローラン展開

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{15.3}$$

を考える (これを a のまわりの $f(z)$ のローラン展開，$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ をその**主要部**いう。)

(1) $c_n = 0$ $(n = -1, -2, ...)$ のとき，(15.3) の右辺は収束整級数だから，$f(a) = c_0$ と定めれば，$f(z)$ は a で正則である。このとき，a を $f(z)$ の**除去可能特異点**という。

(2) ある $m \geq 1$ があって

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad (c_{-m} \neq 0)$$

のとき，a は $f(z)$ の m **位の極**という。

(3) 上の (1),(2) 以外のとき，すなわち $c_m \neq 0$ となる正整数 m が無限個あるとき，a は $f(z)$ の**真性特異点**という。

(15.3) における c_{-1} を $\mathrm{Res}(f,a)$ と書いて，$f(z)$ の a における**留数** (residue) と呼ぶ。

注意 15.1　$f(z)$ のローラン展開を用いると, ある正整数 m があって, $\alpha = \lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) \neq 0$ が存在するとき，a は $f(z)$ の m 位の極になることがわかる。

$f(z)$ は $D^*(a,r)=\{z:0<|z-a|<r\}$ で正則で，そこでのローラン展開が (15.3) であるとする。$0<\rho<r$ とするとき，(15.3) は $\kappa(a,\rho)$ で一様収束するから，(10.4) により，

$$\int_C f(z)\ dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{\kappa(a,\rho)} (z-a)^n\ dz = 2\pi i c_{-1} = 2\pi i \mathrm{Res}(f,a). \tag{15.4}$$

定理 15.2　D を C を単純閉曲線とし，$a_1,\dots a_m$ を D の点とする。Ω を $D\cup C$ を含む領域とし，$f(z)$ は Ω から $a_1,\dots a_m$ を除いた領域で正則とする。このとき，

$$\int_C f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(f,a_k). \tag{15.5}$$

証明. $\rho>0$ を n 個の閉円板 $\bar{D}(a_k,\rho)$ $(k=1,...,n)$ がすべて D に含まれ，かつ互いに交わらないように十分小さく取る。$f(z)$ は $\bar{D}$ から円板 $D(a_k,\rho)$ $(k=1,...,n)$ を除いた集合を含むある領域で正則だから，コーシーの積分定理と (15.4) により

$$\int_C f(z)\ dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\kappa(a_k,\rho)} f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(f,a_k).$$

15.3　留数の求め方

$f(z)$ はローラン展開 (15.3) をもつとする。このとき，$f(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n + h(z)$ とおくと，$h(z)$ は $D(a,r)$ で正則である。もし，ある m があって，すべての $n>m$ に対して $c_{-n}=0$ がわかっているとき（例えば，a が m 位の極のとき）

$$(z-a)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \cdots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + (z-a)^m h(z)$$

の両辺を $(m-1)$ 回微分すると

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-a)^m f(z)\right) = (m-1)!c_{-1} + \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-a)^m h(z)\right).$$

右辺第 2 項は $(z-a)\times(D(a,r)$ 上で正則な関数$)$ の形になるから

$$c_{-1} = \lim_{z\to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-a)^m f(z)\right). \tag{15.6}$$

とくに，a が 1 位の極のときは

$$c_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z). \tag{15.7}$$

今, $h(z)$, $g(z)$ は $D(a,r)$ で正則で，$h(a)\neq 0$, $g(z)$ は a で 1 位の零点をもつとする。このとき，$f(z)=h(z)/g(z)$ は a を 1 位の極にもち，

$$\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{h(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{h(z)}{\frac{g(z)-g(a)}{z-a}} = \frac{h(a)}{g'(a)}. \tag{15.8}$$

例 15.3　$n\geq 2$ を正整数とし，

$$f(z) = \frac{1}{z^n+1}$$

とおく。$f(z)$ の極における留数を求めよ。

まず $f(z)$ の極を求める。$z^n = -1$ の解は，$\zeta_k = e^{(2k-1)\pi/n}$ $(k = 1, ..., n)$. よって

$$f(z) = \frac{1}{(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\cdots(z-\zeta_n)}$$

だから, ζ_1, ζ_2,..., ζ_n はすべて $f(z)$ の 1 位の極。(15.8) を $h(z) = 1$, $g(z) = 1 + z^n$ に応用して (各 ζ_k は $g(z)$ の 1 位の零点)

$$\mathrm{Res}(f, \zeta_k) = \frac{1}{g'(\zeta_k)} = \frac{1}{n\zeta_k^{n-1}} = -\frac{\zeta_k}{n}.$$

15.4　無限遠点で正則な関数

$R > 0$ とし，$f(z)$ は $D = \{z : |z| > R\}$ で正則で，そこでのローラン展開を

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

とする。もし, すべての $n \geq 1$ に対して $c_n = 0$ ならば，$\lim_{z\to\infty} f(z) = c_0$ であり，$f(\infty) = c_0$ とおけば，$f(z)$ は D で定義された関数となる。このとき，$f(z)$ は**無限遠点で正則である**という。$c_0 = 0$ で k が $c_k \neq 0$ となる最小の整数ならば，∞ は k 位の零点という。また, $k \geq 1$ があって $c_k \neq 0$, $c_n = 0$ $(n > k)$ のとき，$f(z)$ は ∞ で k **位の極をもつ**という。C を 0 の回りを一周する D 内の単純閉曲線とする。リーマン球面上で ∞ を左手に見る向きを C に与える。C の向きは時計回りである。このとき

$$-c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\ dz$$

であり，$-c_{-1} = \mathrm{Res}(f, \infty)$ を $f(z)$ の ∞ における**留数**という。無限遠点において正則な関数の留数が 0 とは限らないことに注意する。

15.5　練習問題

問題 15.1 （留数定理）
次の積分を求めよ。積分路は正の向きをもつとする。

(1) $\displaystyle\int_C \frac{z-2}{(z^2+1)^2}\ dz$，$C$ は円 $|z| = r$ $(r > 1)$ の上半部と実軸上の区間 $[-r, r]$ の和

(2) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^4+1}$，$C$ は円 $|z| = r$ $(r > 1)$ の上半部と実軸上の区間 $[-r, r]$ の和

(3) $\displaystyle\int_C z^2 e^{1/z}\ dz$，$C$ は円 $|z| = 1$

問題 15.2 （留数定理）$h(z)$, $g(z)$ は $D(a, r)$ で正則で，$h(a) \neq 0$, $g(z)$ は a で 2 位の零点をもつとする。このとき，$f(z) = h(z)/g(z)$ は a を 2 位の極にもち,

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{6h'(a)g''(a) - 2h(a)g'''(a)}{3g''(a)^2} \tag{15.9}$$

であることを示せ。

問題 15.3 （留数）(1) $f(z)$ を複素平面から有限個の点 a_1, a_2,..., a_m を除いた領域で正則な関数とするとき、次の等式を示せ。

$$\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(f, a_k) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0.$$

(2) $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ を有理関数で $P(z)$ と $Q(z)$ は共通の零点をもたず，かつ $\deg P(z) + 2 \leq \deg Q(z)$ とする。このとき，$f(z)$ の極，すなわち $Q(z)$ の零点を b_1,..., b_m とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(f, b_k) = 0$ を示せ。

15.6 補遺：有理関数の作る線形空間

15.6.1 因子

因子とは形式的な和

$$D = \sum m_P P,$$

のことをいう。ここで，左辺はリーマン球面 $\bar{\mathbb{C}}$ すべての点 P についての和で m_P は整数である。ただし，有限個の点を除き $m_P = 0$ とする。したがって因子はリーマン球面 $\bar{\mathbb{C}}$ の有限個の点 P_1,..., P_n と整数 m_1,..., m_n を用いて

$$D = m_1 P_1 + \cdots + m_n P_n \tag{15.10}$$

と表される[*13]。$m_\nu = 0$ ならば，表示 (15.10) から項 $m_\nu P_\nu$ を省いてもよいし，点 P が表示に現れないときに $0P$ を和の項に加えてよい。因子 (15.10) に対して

$$\deg D = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu$$

とおく。因子 $D_1 = \sum m_P P$, $D_2 = \sum m'_P P$ に対してそれらの和差を

$$D_1 \pm D_2 = \sum (m_P \pm m'_P) P \quad (\text{複号同順})$$

で定める。因子全体はアーベル (可換) 群をつくる。$D = m_1 P_1 + \cdots + m_k P_k$ (m_1,..., m_k は非負整数) の形の因子を正 (positive) 因子または有効 (effective) 因子と呼び，$D \geq 0$ と記す。

15.6.2 有理関数の作る線形空間

有理関数全体の空間を $\mathscr{K}$ と記す。$0 \in \mathscr{K}$ は恒等的に 0 である関数とする。$f \in \mathscr{K} \setminus \{0\}$ に対して，f の零点を P_1,..., P_k, 極を Q_1,..., Q_l とし，これら以外に極と零点は存在しないとする。m_i を零点 P_i の位数，n_i を零点 Q_i の位数とするとき

$$(f) = m_1 P_1 + \cdots + m_k P_k - n_1 Q_1 - \cdots - n_l Q_l \tag{15.11}$$

*13 Farkas-Kra のリーマン面の本のように因子を乗法的に $P_1^{m_1} \cdots P_k^{m_k}$ と書く流儀もある。実は私はこちらの流儀に慣れている。

を f が定める主 (principal) 因子という。主因子に対して

$$\deg(f) = 0 \tag{15.12}$$

がなりたつ (問題 21.2)。因子 D に対して

$$L(D) = \{f \in \mathscr{K} : (f) + D \geq 0\}$$

とおく。$f \in \mathscr{K}$ が $L(D)$ に属するための必要十分条件は $f = 0$ であるか，または

- f は各 P_i で高々 m_i 位の極をもち，かつ
- f は各 Q_j で少なくとも n_j 位の零点をもつ。

$L(D)$ は $\mathbb{C}$ 上の線形 (ベクトル) 空間となる。$\ell(D) = \dim L(D)$ とおく。

定義 15.2　因子 D_1 と D_2 が**同値である**とは，$D_1 = D_2$, あるいは $f \in \mathscr{K} \setminus \{0\}$ があって $D_1 - D_2 = (f)$ となることである。

もし，$D_1 - D_2 = (f)$ ならば $\varphi \in L(D_2)$ に $f\varphi$ を対応させる写像は線形空間 $L(D_2)$ から $L(D_1)$ への同型写像となるから，$\ell(D_1) = \ell(D_2)$. また，(15.12) より $\deg D_1 = \deg D_2$. よって ℓ と $\deg$ は因子の同値類の集合上の関数とみることができる。

補題 15.1　$\ell(D) \geq 1$ ならば D はある正因子と同値である。

証明. $f \in L(D) \setminus \{0\}$ ならば $(f) + D$ は D と同値な正因子。 □

例 15.4　$D = m_1 P_1 + \cdots + m_k P_k$ (m_1,..., m_k は正整数) を正因子とする。ただし，簡単のため P_i はどれも無限遠点でないとする。$f \in L(D)$ のとき,

$$\Phi_i(z) = \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_i^{(j)}}{(z - P_i)^j} \tag{15.13}$$

を $f(z)$ の P_j におけるローラン展開の主要部とするとき，$f(z) - \Phi_1(z) - \cdots - \Phi_k(z)$ は $\bar{\mathbb{C}}$ のすべての点で正則であり，したがって定数である。逆に $1 + \deg D$ 個の複素数 c_0 $c_i^{(j)}$ $(i = 1, ..., k,$ $j = 1, ..., m_i)$ に対して $\Phi_i(z)$ を (15.11) で定めると

$$c_0 + \Phi_1(z) + \cdots + \Phi_k(z) \in L(D).$$

したがって $\ell(D) = \deg D + 1$.

例 15.5　$\deg D < 0$ ならば $\ell(D) = 0$.

なぜなら，$f \in L(D) \setminus \{0\}$ ならば $(f) + D \geq 0$. よって $\deg((f) + D) = \deg(f) + \deg D = \deg D \geq 0$ でないといけない。 □

上の 2 例では $\ell(D) \geq \deg D + 1$ が成り立っているが，これは一般の因子についても正しい。

補題 15.2（**Riemann の不等式**）　因子 D に対して

$$\ell(D) \geq \deg D + 1. \tag{15.14}$$

証明. $D = m_1P_1 + \cdots + m_kP_k - n_1Q_1 - \cdots - n_lQ_l$ (m_i, n_j は正整数) とおく。さらに $\tilde{D} = m_1P_1 + \cdots + m_kP_k$ を定める。線形写像 $T : L(\tilde{D}) \to \mathbb{C}^{n_1+\cdots+n_l}$ を

$$T(f) = (f(Q_1), f'(Q_1), ..., f^{(n_1-1)}(Q_1), ..., f(Q_l), f'(Q_l), ..., f^{(n_l-1)}(Q_l))$$

で定めると，$L(D) = \ker T$. 例 15.4 より

$$\sum_{i=1}^{k} m_i + 1 = \ell(\tilde{D}) = \dim L(\tilde{D}) = \dim T(L(\tilde{D})) + \ell(D) \leq \sum_{j=1}^{l} n_j + \ell(D).$$

よって $\ell(D) \geq \deg D + 1$. □

15.6.3 有理 1 次形式

有理関数 $\varphi(z)$ に対して $\omega = g(z)dz$ を有理型 1 次形式という。点 $P \in \mathbb{C}$ で $\varphi(z)$ が n 位の零点をもつとき，P を ω の n 位の零点，点 P で $\varphi(z)$ が n 位の極をもつとき，P を ω の n 位の極という。無限遠点 ∞ では $z = 1/w$ の変換で

$$\varphi(z)dz = \varphi\left(\frac{1}{w}\right)\left(\frac{dz}{dw}\right)dw = -\frac{1}{w^2}\varphi\left(\frac{1}{w}\right)dw$$

と考え，$-\varphi(1/w)/w^2$ が $w = 0$ において n 位の零点あるいは極をもつとき，ω は ∞ で n 位の零点あるいは極をもつとする。因子 (ω) を (15.11) と同様に定める。これを**標準因子**という。

例 15.6 $\omega_0 = dz$ ならば $z = 1/w$ の変換で $\omega_0 = -w^{-2}dw$ なので $(\omega_0) = -2\infty$ である。

有理型 1 次形式 ω に対して $\omega = f\omega_0$ となる $f \in \mathscr{K}$ が存在するので，(ω) と (ω_0) は同値である。以下，Z で標準因子の同値類，場合によっては適当な有理型 1 次形式 ω が定める因子 (ω) とする。$\deg Z = -2$ である。

定理 15.3 [*14] 任意の因子 D に対して

$$\ell(D) = \deg D + 1 + \ell(Z - D). \tag{15.15}$$

証明. $D \geq 0$ のときは, $\deg(Z-D) = -2-\deg D < 0$ だから例 15.5 より $\ell(Z-D) = 0$. 例 15.4 より (15.15) が成り立つ。$Z-D \geq 0$ のときは, $\deg D = \deg(Z-(Z-D)) = -2-\deg(Z-D) < 0$ ゆえ $\ell(D) = 0$. よって

$$\ell(Z-D) = \deg(Z-D) + 1 = (-2 - \deg D) + 1 + \ell(D).$$

$\ell(D) \geq 1$ のとき，補題 15.1 より D はある正因子と同値。$\ell(Z-D) \geq 1$ のとき，補題 15.1 より $Z-D$ はある正因子と同値。よって，これらのときは (15.15) が成り立つ。$\ell(D) = \ell(Z-D) = 0$ の場合は，Riemann の不等式より $0 \geq \deg D + 1$ かつ $0 \geq \deg(Z-D) + 1 = -\deg D - 1$ より，$\deg D + 1 = 0$. □

[*14] 種数 0 のリーマン面上の Riemann-Roch の定理の証左であるが，ここでは有理型 1 次微分の役割がわからないので，(15.15) を理解するためにはぜひリーマン面の勉強をしてほしい。

16　実積分への応用–三角関数を含む積分

16.1　留数定理の実積分への応用

次の積分を考える。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$$

これは実関数の積分として次のように求められる。まず

$$x^4+1 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1) \tag{16.1}$$

を用いて

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^4+1} &= \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}x+2}{x^2-\sqrt{2}x+1} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{(x^2+\sqrt{2}x+1)'}{x^2+\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{(x^2-\sqrt{2}x+1)'}{x^2-\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \lim_{c\to\infty, d\to\infty} \left[\log \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right]_d^c + 2\times\frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t^2+1} \\
&= 0 + \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

この計算には x^4+1 の因数分解[*15]や $(x^4+1)^{-1}$ の部分分数分解，原始関数を見つけるなどの手間が伴う。しかし，留数定理を応用すると，17.1 で詳しく見るように，被積分関数を複素数の関数に拡張した $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$ の極における留数を求めることによって同じ積分が計算できる。つまり，$f(z)$ の上半平面における極 $e^{\pi i/4}$ と $e^{3\pi i/4}$ における留数

$$\mathrm{Res}(f, e^{\pi i/4}) = \frac{1}{e^{3\pi i/4}}, \quad \mathrm{Res}(f, e^{3\pi i/4}) = \frac{1}{e^{\pi i/4}},$$

から

$$I = 2\pi i(\mathrm{Res}(f, e^{\pi i/4}) + \mathrm{Res}(f, e^{3\pi i/4})) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

となる。つまり，被積分関数の複素関数への拡張の情報から, たとえその原始関数がわからなくても，積分が求まることがある。これから，留数定理の実積分へのいくつかの応用を見ていく。

[*15] この因数分解も複素数の世界で考えた方が見つけやすい。$x^4 = -1$ の解 $e^{\pi i/4}$, $e^{3\pi i/4}$, $e^{-\pi i/4}$, $e^{-3\pi i/4}$ を求めれば

$$\begin{aligned}
x^4+1 &= [(x-e^{\pi i/4})(x-e^{-\pi i/4})][(x-e^{3\pi i/4})(x-e^{-3\pi i/4})] \\
&= (x^2-2\cos(\pi/4)x+1)(x^2-2\cos(3\pi/4)x+1)
\end{aligned}$$

から (16.1) を得る。

16.2　三角関数を含む積分

$F(x, y)$ を 2 変数の有理関数とするとき，

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\ d\theta$$

を留数定理を応用して求める。

単位円周 $C = \{z : |z| = 1\}$ 上の点を $z = e^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ とおくと，

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i},$$

$$\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz.$$

したがって

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\ d\theta = \int_C F\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}. \tag{16.2}$$

ここで

$$f(z) = F\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) \frac{1}{iz}$$

が C 上で極をもたないと仮定する。C の内部での $f(z)$ の極を a_1, a_2,..., a_n とおくと

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\ d\theta = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_k). \tag{16.3}$$

16.3　計算例

例 16.1

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta + c\sin\theta}$$

を求める。ただし，a, b, c は実定数で $a > \sqrt{b^2 + c^2} > 0$ とする。

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\left(a + b\frac{z+1/z}{2} + c\frac{z-1/z}{2i}\right)} \frac{1}{iz} = \frac{2}{i((b - ic)z^2 + 2az + (b + ic))} \\ &= \frac{2}{i(b - ic)} \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} \end{aligned}$$

とおく。ここで

$$\alpha = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{b - ic}, \qquad \beta = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{b - ic}.$$

$a - \sqrt{b^2 + c^2} < \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}$ だから，

$$|\alpha| = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}} < 1 < |\beta| = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

であり，したがって $f(z)$ の単位円板内の極は α のみで，それは 1 位の極である。

$$\mathrm{Res}(f,\alpha) = \frac{2}{i(b-ic)(\alpha-\beta)} = \frac{1}{i\sqrt{a^2-b^2-c^2}}.$$

よって

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}} \tag{16.4}$$

注意 16.1　$\sin\varphi = b/\sqrt{b^2+c^2}$, $\cos\varphi = c/\sqrt{b^2+c^2}$ とおいて

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\sqrt{b^2+c^2}\sin(\theta+\varphi)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\sqrt{b^2+c^2}\sin\theta}$$

として $b=0$ の場合に帰着できる。条件 $a > \sqrt{b^2+c^2}$ の必要性の理由が明白になってこの方がよいかもしれない。

系 16.1　$0<a<1$ のとき

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-a^2}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta = 1.$$

例 16.2　$a>|b|>0$, (b は実数) として，次の積分を求める。

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\sin\theta)^2}.$$

$$f(z) = \frac{1}{\left(a+b\frac{z-1/z}{2i}\right)^2}\frac{1}{iz} = \frac{4iz}{(bz^2+2aiz-b)^2} = \frac{4iz}{b^2(z-\alpha)^2(z-\beta)^2}$$

とおく。ここで

$$\alpha = \left(\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)i, \qquad \beta = \left(\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)i.$$

$a-\sqrt{a^2-b^2} < b$ だから，

$$|\alpha| = \frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b} < 1 < |\beta| = \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

であり，したがって $f(z)$ の単位円板内の極は α のみで，それは 2 位の極である。

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,\alpha) &= \lim_{z\to\alpha}\frac{d}{dz}\big((z-\alpha)^2 f(z)\big) = \lim_{z\to\alpha}\frac{d}{dz}\left(\frac{4iz}{b^2(z-\beta)^2}\right)\\ &= \frac{4(\alpha+\beta)}{ib^2(\alpha-\beta)^3} = \frac{a}{i(a^2-b^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\sin\theta)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}} \tag{16.5}$$

16.4 練習問題

問題 16.1　次の積分を求めよ。(5) は実積分ではないが，この章で紹介した方法で計算できる。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta},$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta,\ \ 0<|a|<1,\ n=0,1,2,...,$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{1-2a\cos 2\theta+a^2}d\theta,\ \ 0<a<1,$

(4) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin n\theta}{a-b\sin\theta}d\theta,\ \ 0<b<a,\ n=1,2,...,$

(5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos e^{i\theta}\ d\theta.$

(6) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)d\theta,\ \ n=1,2,...,$

(7) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(n\theta-\sin\theta)d\theta,\ \ n=1,2,....$

(8) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta,\ \ 0<b<a.$

問題 16.2　(例 16.1 の一般化) $a>\sqrt{b^2+c^2}>0$ のとき，次の積分を求めよ。

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta+c\sin\theta)^n} \qquad n=1,2,\cdots.$$

問題 16.3　次の問いの答えよ。

(1) $r<1$ とする。円 $|z|=r$ 上で $\log(1-z)/z$ の積分を考えることにより，次を示せ。

$$\int_0^{\pi} \log(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta.$$

(2) $r>1$ のとき，次を示せ。

$$\int_0^{\pi} \log(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta=2\pi\log r.$$

17　実積分への応用 2–広義積分

17.1　広義積分への応用（その 1）

$P(z)$ と $Q(z)$ は実数係数の多項式で，これらは共通の零点をもたないとする。さらに次の条件をみたすとする。

(1) $P(z)$ と $Q(z)$ のそれぞれの次数を $m = \deg P$, $n = \deg Q$ とおくとき，$n \geq m + 2$.
(2) $Q(z)$ は実軸上に零点をもたない。

$Q(z)$ の上半平面における零点全体を a_1,..., a_p とすると，これらは $f(z) = P(z)/Q(z)$ の上半平面における極である。このとき，次が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Res}(f, a_k). \tag{17.1}$$

式 (17.1) の左辺の広義積分は条件 (1) より収束するから

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx.$$

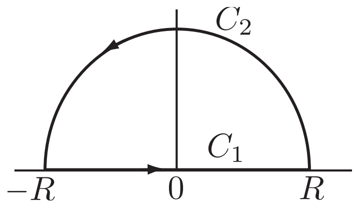
条件 (2) より，正定数 M, $R_0 > 1$ が存在して，$|z| > R_0$ ならば,

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{n-m}} \leq \frac{M}{|z|^2} \tag{17.2}$$

が成り立つ。今，$R > R_0$ とし，図のような積分路 $C = C_1 + C_2$ を考える。(17.2) より，a_1,..., a_p は C の内部にある。

留数定理により

$$\int_C \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Res}(f, a_k). \tag{17.3}$$



ここで $R \to \infty$ とすると

$$\left|\int_{C_2} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})}(iRe^{i\theta})\,d\theta\right| \leq \int_0^{\pi} \frac{M}{R^2} R\,d\theta = \frac{M\pi}{R} \to 0.$$

したがって，(17.3) において $R \to \infty$ とすると，(17.1) を得る。

例 17.1

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{2n}+1}\,dx \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

を求める。

$$I_n = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n}+1}\,dx$$

である。$f(z) = 1/(z^{2n}+1)$ とおく。$\zeta = e^{\frac{\pi i}{2n}}$ とおくと，$f(z)$ の上半平面における極は ζ, ζ^3,..., ζ^{2n-1} の n 個で，これらは 1 位の極である。η をこれらの 1 つとすると

$$\mathrm{Res}(f, \eta) = \frac{1}{2n\eta^{2n-1}} = -\frac{\eta}{2n}.$$

よって，(17.1) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n}+1}\ dx = -\frac{2\pi i}{2n}(\zeta+\zeta^3+\cdots+\zeta^{2n-1})$$
$$= \frac{\pi i}{n}\frac{\zeta(1-\zeta^{2n})}{\zeta^2-1} = \frac{\pi}{n}\frac{1}{\left(\dfrac{\zeta-\zeta^{-1}}{2i}\right)} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

よって

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n}+1}\ dx = \frac{\pi}{2n\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

17.2　広義積分への応用（その２）

$P(z)$ と $Q(z)$ は上の章と同じで，ただし，条件 (1) の代わりに次の条件をみたすとする。

(1)’ $P(z)$ と $Q(z)$ のそれぞれの次数を $m=\deg P$, $n=\deg Q$ とおくとき，$n \geq m+1$.

$Q(z)$ の上半平面における零点全体を a_1,..., a_p とする。 $b>0$ とし，$f(z)=P(z)e^{ibz}/Q(z)$ とおくと，次が成り立つ。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\cos bx\ dx &= \mathrm{Re}\left(2\pi i\sum_{k=1}^{p}\mathrm{Res}(f,a_k)\right),\\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\sin bx\ dx &= \mathrm{Im}\left(2\pi i\sum_{k=1}^{p}\mathrm{Res}(f,a_k)\right)\end{aligned} \tag{17.4}$$

$$\int_{c}^{d} \frac{P(x)}{Q(x)}e^{ibx}\ dx = \left[\frac{P(x)}{ibQ(x)}e^{ibx}\right]_c^d - \frac{1}{ib}\int_c^d e^{ibx}\left(\frac{P'(x)Q(x)-P(x)Q'(x)}{Q(x)^2}\right)dx$$

ここで

$$\deg Q(x)^2 = 2n \geq (m+n-1)+2 = \deg(P'(x)Q(x)-P(x)Q'(x))+2$$

だから，広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}e^{ibx}\ dx = -\frac{1}{ib}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ibx}\left(\frac{P'(x)Q(x)-P(x)Q'(x)}{Q(x)^2}\right)dx$$

は収束する。したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}e^{ibx}\ dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}e^{ibx}\ dx.$$

17.1 節と同じ積分曲線 C を用いて

$$\int_C \frac{P(z)}{Q(z)}e^{ibz}\ dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{p}\mathrm{Res}(f,a_k). \tag{17.5}$$

M, R_0 は (17.2) の替わりに $|f(z)| \le M/|z|$ が成り立つようにとる。$R > R_0$ のとき,

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_2} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{ibz}\ dz\right| &= \left|\int_0^{\pi} \frac{P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})} e^{iRe^{i\theta}} (iRe^{i\theta})\ d\theta\right| \\ &\le 2M \int_0^{\pi/2} e^{-bR\sin\theta} d\theta < 2M \int_0^{\pi/2} e^{-2bR\theta/\pi} d\theta \\ &= \frac{M\pi}{bR}(1 - e^{-bR}) \to 0 \quad (R \to \infty).\end{aligned}$$

ここで $0 < \theta < \pi/2$ のとき，Jordan の不等式

$$\frac{2\theta}{\pi} < \sin\theta$$

が成り立つことを用いた。(18.1) において $R \to \infty$ とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{ibz}\ dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Res}(f, a_k).$$

両辺の実部と虚部をとれば (17.4) を得る。

例 17.2

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$$

を求める。$f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ とおくと，f の上半平面内の極は i のみであり，これは 1 位の極。よって

$$\mathrm{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} \frac{e^{iz}}{z+i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\ dx = 2\pi i \mathrm{Res}(f, i) = \frac{\pi}{e}.$$

両辺の実部をとって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\ dx = \frac{\pi}{e}.$$

被積分関数は偶関数だから

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

17.3 練習問題

問題 17.1 次の積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ (2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$ (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(0 < a < b)$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+ax+b}$, a, b は実数で $a^2 - 4b < 0$

問題 17.2 次の積分を計算せよ。a は正の実数とする。

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2ax}{x^2+x+1} dx$ (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2ax}{x^2+x+1} dx$

18　実積分への応用 3–フレネル積分など

18.1　広義積分への応用（その３）

例 18.1 と 18.2 における積分路は図 18.1 の曲線である。

例 18.1

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\ dx = \frac{\pi}{2}.$$

$0<\epsilon<R$ として図のような積分曲線 $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ を考える。$f(z) = z^{-1}e^{iz}$ とおくと C およびその内部で $f(z)$ は正則だから, $\int_C f(z)\ dz = 0$. よって

$$\int_{C_1} f(z)\ dz + \int_{C_3} f(z)\ dz + \int_{C_4} f(z)\ dz = \int_{-C_2} f(z)\ dz \qquad (18.1)$$

C_1,$-C_2$, C_3, C_4 の媒介変数表示として次を選ぶ。

$$\begin{aligned} C_1 &= \{z = x + 0i : -R \le x \le -\epsilon\}, & -C_2 &= \{z = \epsilon e^{i\theta} : 0 \le \theta \le \pi\}, \\ C_3 &= \{z = x + 0i : \epsilon \le x \le R\}, & C_4 &= \{z = Re^{i\theta} : 0 \le \theta \le \pi\}. \end{aligned}$$

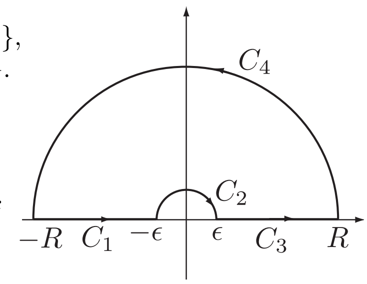


図 3　例 18.1, 例 18.2

ここで

$$\int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\ dx + \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x}\ dx = 2i\int_\epsilon^R \frac{\sin x}{x}\ dx$$

したがって $R\to+\infty$, $\epsilon\to 0$ とすると

$$\int_{C_1} f(z)\ dz + \int_{C_3} f(z)\ dz \to 2i\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\ dx$$

$\epsilon \to 0$ とするから $\epsilon < 1/2$ と仮定してよい。z が C_2 上にあるとき

$$\left|\frac{e^{iz}-1}{z}\right| = \left|\frac{1}{z}\sum_{n=1}^\infty \frac{(iz)^n}{n!}\right| \le \sum_{n=0}^\infty |z|^n < 2.$$

これから

$$\left|\int_{-C_2} \frac{e^{iz}-1}{z}\ dz\right| \le \int_{-C_2} \left|\frac{e^{iz}-1}{z}\right|\ |dz| < 2\epsilon\pi \to 0 \qquad (\epsilon\to 0).$$

$$\int_{-C_2} \frac{dz}{z} = \int_0^\pi i d\theta = \pi i.$$

よって

$$\int_{-C_2} f(z)\ dz = \int_{-C_2} \frac{dz}{z} + \int_{-C_2} \frac{e^{iz}-1}{z}\ dz \to \pi i$$

最後に

$$\left|\int_{C_4} f(z)\ dz\right| \le \left|\int_0^\pi \frac{e^{Re^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} \times iRe^{i\theta}\ d\theta\right|$$
$$\le \int_0^\pi e^{-R\sin\theta}\ d\theta$$
$$\le 2\int_0^{\pi/2} e^{-(2R/\pi)\theta}\ d\theta = \frac{\pi}{R}(1-e^{-\pi R})$$

は $R\to\infty$ のとき 0 に収束する。したがって (18.1) において $R\to\infty, \epsilon\to 0$ とすると

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\ dx = \frac{\pi}{2}$$

を得る。

例 18.2　$a>0$ のとき，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}\ dx$ を求める。

$f(z)=\log z$ を正の実軸上で実対数関数 $\log x$ と一致する分枝とする。このとき, $x>0$ ならば, $f(-x)=\log(e^{i\pi}x)=(-1)+\log x$ である。積分路 C を図 18.1 のようにとると，C の内部における $f(z)/(z^2+a^2)$ の極は ai のみで，これは一位の極。

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f(z)}{x^2+a^2}, ai\right) = \frac{f(ai)}{2ai} = \frac{\log a + \frac{\pi}{2}i}{2ai}.$$

したがって

$$\int_C \frac{f(z)}{x^2+a^2}\ dz = \frac{\pi\log a}{a} + \frac{\pi^2}{2a}i. \tag{18.2}$$

ここで

$$\left|\int_{C_4} \frac{f(z)}{z^2+a^2}\ dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{\log Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta})^2+a^2} iRe^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^\pi \frac{(\log R+\pi)R}{R^2-a^2}d\theta$$
$$= \pi\left(\frac{\log R+\pi}{R}\right)\frac{R^2}{R^2-a^2} \to 0 \quad (R\to\infty),$$

$$\left|\int_{C_2} \frac{f(z)}{z^2+a^2}\ dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{\log \epsilon e^{i\theta}}{(\epsilon e^{i\theta})^2+a^2} i\epsilon e^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^\pi \frac{(\log \epsilon+\pi)\epsilon}{a^2-\epsilon^2}d\theta$$
$$= \frac{(\log\epsilon+\pi)\epsilon\pi}{a^2-\epsilon^2} \to 0 \quad (\epsilon\to 0),$$

$$\int_{C_1} \frac{f(z)}{z^2+a^2}\ dz = \int_\epsilon^R \frac{\log(-x)}{x^2+a^2}\ dx = \int_\epsilon^R \frac{\log x}{x^2+a^2}\ dx + \pi i\int_\epsilon^R \frac{dx}{x^2+a^2}.$$

したがって，(18.2) において $R\to\infty, \epsilon\to 0$ とすると，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}$ だから

$$2\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}dx + \frac{\pi^2}{2a}i = \frac{\pi\log a}{a} + \frac{\pi^2}{2a}i.$$

よって

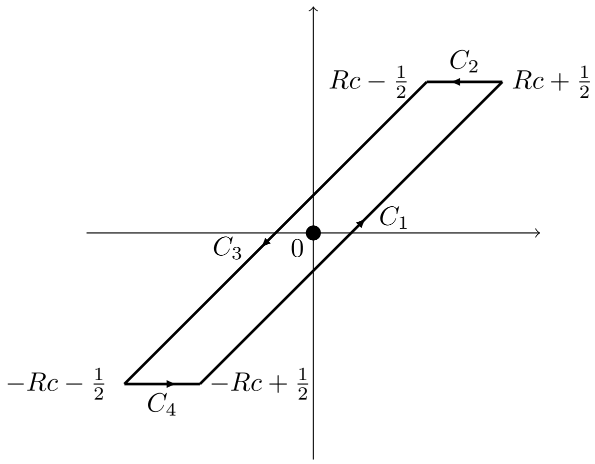
$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi\log a}{2a}.$$

18.2　広義積分への応用（標準正規分布の確率密度関数）

定理 18.1

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = 1. \tag{18.3}$$

証明. $f(z) = e^{i\pi z^2}$, $F(z) = f(z)/\sin \pi z$ とおく。$c = e^{\pi i/4} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ とし，正数 R に対して，C_1 を $-Rc+\frac{1}{2}$ から $Rc+\frac{1}{2}$ を結ぶ線分，C_2 を $Rc+\frac{1}{2}$ から $Rc-\frac{1}{2}$ を結ぶ線分，C_3 を $-Rc-\frac{1}{2}$ から $-Rc-\frac{1}{2}$ を結ぶ線分，C_4 を $-Rc-\frac{1}{2}$ から $-Rc+\frac{1}{2}$ を結ぶ線分とし，$C = C_1+C_2+C_3+C_4$ とおく。C は平行四辺形の周である。



C の内部にある $F(z)$ の極は 0 のみで，これは 1 位の極であり，

$$\mathrm{Res}(F,0) = \frac{1}{\pi}\lim_{z\to 0}(\pi z)\frac{e^{i\pi z^2}}{\sin \pi z} = \frac{1}{\pi}.$$

よって

$$\int_C F(z)\ dz = 2i. \tag{18.4}$$

C_1 と $-C_3$ の媒介変数表示 $ct \pm \frac{1}{2}$ $(-R \le t \le R)$ を用いると

$$f(ct\pm\frac{1}{2}) = e^{-\pi t^2 + i\pi/4}e^{\pm i\pi ct} = ce^{-\pi t^2}e^{\pm i\pi ct},\ \sin\pi(ct\pm\frac{1}{2}) = \pm\cos\pi ct.$$

よって

$$\begin{aligned}\int_{C_1+C_3} F(z)dz &= \int_{C_1} F(z)dz - \int_{-C_3} F(z)dz \\ &= \int_{-R}^{R} \frac{ce^{-\pi t^2}e^{i\pi ct}}{\cos\pi ct}\ cdt - \int_{-R}^{R}\frac{ce^{-\pi t^2}e^{-i\pi ct}}{(-\cos\pi ct)}\ cdt \\ &= 2i\int_{-R}^{R} e^{-\pi t^2}\ dt.\end{aligned}$$

C_4 と $-C_2$ の媒介変数表示 $\mp Rc + t$ $(-1/2 \le t \le 1/2)$ を用いると

$$\begin{aligned}|\exp(i\pi(\mp Rc+t)^2)| &= |\exp(-R^2\pi + i\pi t^2 \mp 2Rct\pi i)| \\ &= |\exp(-R^2\pi \pm \sqrt{2}Rt\pi)| \le \exp(-R^2\pi + R\pi/\sqrt{2}).\end{aligned}$$

$$|\sin\pi(\mp Rc+t)| \geq |\sinh(\mathrm{Im}\,(\pi(\mp Rc+t)))| = \sinh(R\pi/\sqrt{2}).$$

(練習問題 18.1 参照) したがって $k=2,4$ のとき

$$\left|\int_{C_k} F(z)\ dz\right| = \left|\int_{-1/2}^{1/2} F(\mp Rc+t)\ dt\right| \leq \frac{\exp(-R^2\pi + R\pi/\sqrt{2})}{\sinh(R\pi/\sqrt{2})} \to 0\ (R\to\infty).$$

よって (23.3) で $R\to\infty$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\ dt = 1.$$

$t = x/\sqrt{2\pi}$ とおいて (18.3) を得る。 □

18.3 広義積分への応用（フレネル積分）

定理 18.2 （フレネル (Fresnel) 積分）

$$\int_0^{\infty} \cos x^2\ dx = \int_0^{\infty} \sin x^2\ dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}. \tag{18.5}$$

証明. $f(z) = e^{iz^2}$ とおく。正数 R に対して，C_1 を 0 から R を結ぶ線分，C_2 を R から $R+iR$ を結ぶ線分，C_3 を 0 から $R+iR$ を結ぶ線分とする。コーシーの積分定理から

$$\int_{C_1} f(z)\ dz + \int_{C_2} f(z)\ dz = \int_{C_3} f(z)\ dz. \tag{18.6}$$

ここで $R\to\infty$ のとき，

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^R e^{ix^2}\ dx = \int_0^R \cos(x^2)\,dx + i\int_0^R \sin(x^2)\,dx \to \int_0^{\infty} \cos(x^2)\,dx + i\int_0^{\infty} \sin(x^2)\,dx.$$

次に

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_2} f(z)\ dz\right| &= \left|\int_0^R e^{i(R+it)^2} i dt\right| \\ &\leq \int_0^R e^{-2Rt} dt = \frac{1-e^{-2R^2}}{2R} \to 0\ (R\to\infty).\end{aligned}$$

最後に

$$\int_{C_3} f(z)\ dz = \int_0^R e^{i(t+it)^2}(1+i)\ dt = \int_0^R e^{-2t^2}(1+i)dt.$$

ここで，(18.3) を用いると

$$\int_0^{\infty} e^{-2t^2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

が示せるから

$$\int_{C_3} f(z)\ dz \to (1+i)\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

よって (23.5) において $R\to\infty$ とすると

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2)\ dx + i\int_0^{\infty} \sin(x^2)\ dx = (1+i)\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

この実部と虚部を比較して (23.4) を得る。 □

18.4　練習問題

問題 18.1　定理 18.1 の証明で用いた次の不等式を証明せよ。$z = x + iy$ $(x, y$ は実数$)$ のとき

$$|\sin z| \geq |\sinh y|.$$

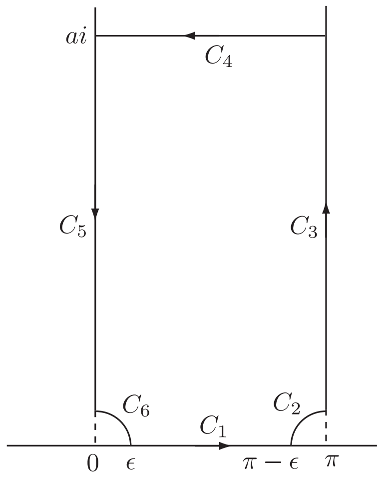
問題 18.2　$a > 0$ のとき，$I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{(\log x)^n}{x^2 + a^2}\ dx$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$n \geq 1$ のとき，I_n を I_k $(k = 0, 1, ..., n-1)$ を用いて表せ。

(2)　I_2, I_3 を求めよ。

問題 18.3　(1) $f(z) = \log(1 - e^{2iz})$ を図の $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_6$ に沿って積分し $a \to +\infty$, $\epsilon \to +0$ とすることで次を示せ。。

$$\int_0^\pi \log(\sin x)\ dx = -\pi \log 2$$



(2) 次を示せ。

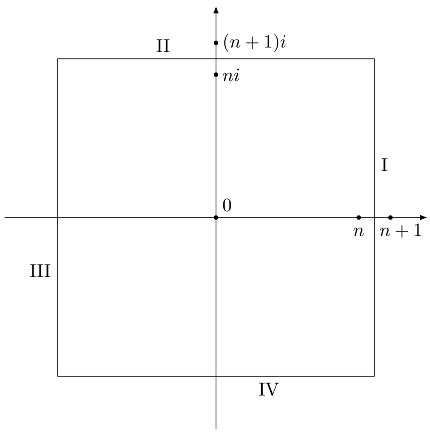
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\ dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

19 留数定理の無限級数への応用

19.1 留数定理の無限級数への応用 (ゼータ関数の特殊値)

補題 19.1 n を自然数とし，C_n を $(\pm 1 \pm i)\left(n+\frac{1}{2}\right)$ を頂点にもつ正方形の周とする。このとき，すべての n に対して z が C_n 上の点ならば

$$|\cot \pi z| \leq \coth\left(\frac{3}{2}\pi\right), \quad \left|\frac{1}{\sin \pi z}\right| \leq \frac{1}{\sinh\left(\frac{3}{2}\pi\right)}.$$



証明. 図のように C_n の辺に I, II, II, IV とラベルを与える。z が線分 I または III 上にあるとき。$z = \pm\left(n+\dfrac{1}{2}\right) + iy$ とする。

$$e^{i\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} = (-1)^n i, \quad e^{-i\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} = (-1)^n(-i)$$

だから

$$|\cot \pi z| = \left|\frac{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}}\right| = \left|\frac{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}\right| = \tanh \pi y < 1.$$

z が線分 II または IV 上にあるとき。$z = x \pm i\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$ とする。

$$\begin{aligned}|\cot \pi z| = \left|\frac{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}}\right| &\leq \frac{|e^{\pi i z}| + |e^{-\pi i z}|}{||e^{\pi i z}| - |e^{-\pi i z}||} = \frac{e^{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} + e^{-\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{e^{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} - e^{-\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}} \\ &= \coth\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \leq \coth\left(\frac{3}{2}\pi\right)\end{aligned}$$

したがって z が C_n 上にあれば

$$|\cot \pi z| \leq \coth\left(\frac{3}{2}\pi\right).$$

後半は演習問題とする。 □

補題 19.2　n を整数とし，$f(z)$ は $z=n$ の近傍で正則であるとする。このとき

$$g(z)=\pi f(z)\cot\pi z, \quad h(z)=\frac{\pi f(z)}{\sin\pi z}$$

とおくと

$$\operatorname{Res}(g,n)=f(n), \quad \operatorname{Res}(h,n)=(-1)^n f(n)$$

証明. n は $\cot\pi z$ と $1/\sin\pi z$ の 1 位の極である。よって $f(n)\neq 0$ ならば，n は $g(z)$ と $h(n)$ の 1 位の極であり，$f(n)=0$ ならば $g(z)$ と $h(z)$ は n で正則である。したがって

$$\operatorname{Res}(g,n)=\lim_{z\to n} f(z)\cos\pi(z-n)\frac{\pi(z-n)}{\sin\pi(z-n)}=f(n),$$

$$\operatorname{Res}(h,n)=\lim_{z\to n} f(z)\frac{\pi(z-n)}{\sin\pi(z-n)}=(-1)^n f(n).$$

□

定理 19.1　$f(z)$ を複素平面 $\mathbb{C}$ 上有限個の極 c_1, c_2,.., c_m を除いて正則で，c_1, c_2,.., c_m のどれも整数ではないとする。もしある R と $K>0$ が存在して $|z|>R$ ならば $|z^2 f(z)|\leq K$ が成り立つとき，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)=-\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}(g,c_k) \tag{19.1}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n f(n)=-\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}(h,c_k). \tag{19.2}$$

ただし，$g(z)$ と $h(z)$ は補題 19.2 で定義された関数である。

証明. $|n|>R$ のとき，$|f(n)|\leq Kn^{-2}$ ゆえ，(19.1) と (19.2) の左辺は絶対収束する。仮定より $g(z)$ の極の集合は $P=\{c_1,...,c_m\}\cup\mathbb{Z}$ である。補題 19.1 の C_n をその内部に c_1, c_2,.., c_m をすべて含むようにとれば、留数定理と補題 19.2 により

$$\int_{C_n} g(z)dz=2\pi i\sum_{a\in P}\operatorname{Res}(g,a)=2\pi i\sum_{|j|\leq n} f(j)+2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}(g,c_k). \tag{19.3}$$

$n>R$ とすると，C_n 上で $f(z)|\leq Kn^{-2}$ ゆえ補題 19.1 より

$$\left|\int_{C_n} g(z)dz\right|\leq\int_{c_n}\pi|f(z)\cot\pi z||dz|\leq\frac{\pi K\coth\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{n^2}\cdot 4(n+1)\to 0\ (n\to\infty).$$

したがって (19.3) より (19.1) を得る。(19.2) も同様にして得られる。　□

注意 19.1　c_1, c_2,.., c_m のどれかが整数のときも，若干の修正で (19.1),(19.2) と同様の等式が得られる。

例 19.1　$\cot\pi z$ の 0 のまわりのローラン展開は

$$\cot\pi z=\frac{1}{\pi z}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2^{2k}B_{2k}\frac{\pi^{2k-1}}{(2k)!}z^{2k-1}. \tag{19.4}$$

ただし B_{2k} はベルヌーイ (Bernoulli) 数で (問題 19.2)，$B_2 = 1/6$ と漸化式

$$(2k+1)B_{2k} = -\sum_{m=1}^{k-1} \binom{2k}{2m} B_{2m}B_{2(k-m)} \quad (k \geq 2)$$

によって帰納的に求められる。

n	2	4	6	8	10	12
B_n	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$

定理 19.1 を $f(z) = z^{-2k}$ $(k = 1, 2, ...)$ に応用すると (ただし，$f(z)$ は $z = 0$ で極をもつから議論に少しの修正が必要)

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\mathrm{Res}(g, 0)$$

だから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1}}{2} \frac{B_{2k}}{(2k)!}(2\pi)^{2k}.$$

とくに

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{6} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots, \\
\frac{\pi^4}{90} &= \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots, \\
\frac{\pi^6}{945} &= \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \cdots.
\end{aligned}$$

19.2　練習問題

問題 19.1　補題 19.1 の後半を示せ。すなわち，$z \in C_n$ のとき，不等式 $\left|\frac{1}{\sin \pi z}\right| \leq \frac{1}{\sinh\left(\frac{3}{2}\pi\right)}$ を示せ。

問題 19.2　ベルヌーイ数 B_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ は

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n$$

で定義される[*16]。

(1)　e^t のマクローリン展開を利用して，B_0, B_1, B_2 を求めよ。

(2)　$\dfrac{te^t}{e^t - 1} - \dfrac{t}{2}$ が偶関数であることを示し，$B_{2k+1} = 0$ $(k = 1, 2....)$ を証明せよ。

(3)　$\cot \pi z = i\dfrac{e^{2\pi i z} + 1}{e^{2\pi i z} - 1}$ を用いて (19.4) を示せ。

[*16] したがって $B_1 = 1/2$ であるが，$B_1 = -1/2$ とする流儀もある。

20　解析接続

20.1　一致の定理

補題 20.1　$f(z)$ は円板 $D = \{z : |z-a| < r\}$ で正則とする。D の点 a に収束する点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(z_n \neq a)$ 上で $f(z_n) = 0$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ ならば, D において恒等的に $f(z) = 0$ である。

証明. $f(z)$ の a におけるテイラー展開を

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \cdots$$

とする。$f(z)$ は a で連続なので $c_0 = f(a) = \lim_{n\to 0} f(z_n) = 0$. よって

$$f(z) = (z-a)f_1(z), \quad f_1(z) = c_1 + c_2(z-a) + c_3(z-a)^2 + \cdots$$

と書ける。$f_1(z)$ は $f(z)$ と同じ収束半径をもつから，点 a において正則（よって連続）である。$z_n \neq a$ より $f_1(z_n) = 0$ $(n = 1, 2, ...)$ であるから，$c_1 = f_1(a) = \lim_{n\to 0} f_1(z_n) = 0$. 以下，これを繰り返せば，$c_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, 3, ...)$ がわかるので，D 上恒等的に $f(z) = 0$ である。 □

定理 20.1　（一致の定理）$f(z)$ は領域 D で正則とする。D の点 a に収束する点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}(z_n \neq a)$ があって $f(z_n) = 0$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ ならば, D において恒等的に $f(z) = 0$ である。

証明. $f(z)$ の a を中心とする収束円を考えれば，補題 20.1 により，そこで恒等的に $f(z) = 0$ である。w を D の任意の点とし，C を a から w を結ぶ折れ線とする。 今，$z(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ を C の媒介変数表示とする。このとき，

$$I = \{t \in (0,1) : t \text{ を内点にもつ区間 } (\alpha, \beta) \text{ があって，} s \in (\alpha, \beta) \text{ のとき，} f(z(s)) = 0\}$$

とおくと I は $(0,1)$ の開部分集合で，かつ 0 の近傍を含む。今 I の点列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $t_0 \in (0,1)$ に収束すれば，$w_n = z(t_n)$ は $w_0 = w(t_0)$ に収束し，かつ $f(w_n) = 0$ だから，補題 20.1 により，w_0 を中心とする f の収束円上で恒等的に $f(z) = 0$ である。したがって $w_0 \in I$. このことから，I は $(0,1)$ の開かつ閉である部分集合であり，$(0,1)$ の連結性により $I = (0,1)$. よって，すべての $t \in (0,1)$ に対して $f(z(t)) = 0$. $f(z)$ は w で連続ゆえ $f(w) = \lim_{t\to 1} f(z(t)) = 0$. したがって，$D$ において恒等的に $f = 0$ である。 □

系 20.1　（一致の定理）$f(z)$ と $g(z)$ は領域 D で正則とする。D の点 a に収束する点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ があって $f(z_n) = g(z_n)$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ ならば, D において恒等的に $f(z) = g(z)$ である。もし，とくに D の開部分集合 D_0 上で $f(z) = g(z)$ であれば，D 上全体で $f(z) = g(z)$ である。

証明. 定理 20.1 を $f(z) - g(z)$ に対して用いればよい。 □

20.2　解析接続

定義 20.1　$f(z)$ を領域 D 上の正則関数とする。領域 $\Omega \supset D$ で定義された正則関数 $F(z)$ が

$$F(z) = f(z) \quad (z \in D)$$

をみたすとき，$F(z)$ は $f(z)$ の Ω 上への**解析接続**という。

$F_1(z)$ と $F_2(z)$ がともに $f(z)$ の Ω 上への解析接続であるとき，D 上で $F_1(z) = F_2(z) = f(z)$ だから，一致の定理により Ω 上で $F_1(z) = F_2(z)$.

20.3 鏡像の原理

定理 20.2　D_1 と D_2 はそれぞれ上半平面と下半平面内の領域で，実軸上の区間 (a,b) は D_1 と D_2 の両方の境界に含まれるとする。f_1 は D_1 で正則，$D_1 \cup (a,b)$ で連続，f_2 は D_2 で正則，$D_2 \cup (a,b)$ で連続で，$f_1(z) = f_2(z)$ $(z \in (a,b))$ とする。このとき

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & z \in D_1 \cup (a,b) \\ f_2(z) & z \in D_2 \end{cases}$$

は $D = D_1 \cup (a,b) \cup D_2$ で正則である。

証明. 以下，$R(\alpha,\beta;\gamma,\delta)$ で長方形 $\{x+iy : \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta\}$ を表すこととする。(a,b) の各点 z_0 で $f(z)$ が正則であることを示せばよい。z_0 を含む長方形 $R = R(\alpha,\beta;-\gamma,\gamma)$ を，その閉包が D に含まれるように取る。∂R を R の周に正の向きを与えたものとする，このとき，補題 11.1 より，

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

は R 上の正則関数である。したがって，証明のためには次のことを示せばよい。

$$R \text{ 上で}\quad f(z) = \varphi(z). \tag{20.1}$$

$R_1 = R(\alpha,\beta;0,\gamma)$, $R_2 = R(\alpha,\beta;-\gamma,0)$ とおく。R 上で $f(z)$ と $\varphi(z)$ は連続だから, 次を示せば (20.1) は従う。

$$R_1 \cup R_2 \text{ 上で}\quad f(z) = \varphi(z). \tag{20.2}$$

この (20.2) を示すには $z \in R_1$ の場合と $z \in R_2$ の場合それぞれについて考えなければいけないが，証明の仕方は同じなので，ここでは $z \in R_1$ とする。次を示す。

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{20.3}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{20.4}$$

これらが成り立てば，辺々の和をとると，(20.3) の R_1 の下辺の積分と (20.4) の R_2 の上辺の積分が打ち消し合って

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

したがって，R_1 上で $f(z) = \varphi(z)$ を得る。今，$0 < \epsilon_0 < \operatorname{Im} z$ とし，$0 < \epsilon < \epsilon_0$ に対して $R_\epsilon = R(\alpha,\beta;\epsilon,\gamma)$ とおく。コーシーの積分公式により

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R_\epsilon} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{20.5}$$

$A = \alpha + i\epsilon$, $B = \beta + i\epsilon$ とおくと $\partial R_1 - \partial R_\epsilon$ は α, β, B, A, α を順に線分で結んでできる閉曲線で，これを C_ϵ とおくと

$$\left| \int_{R_1} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{R_\epsilon} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| = \left| \int_{C_\epsilon} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right|. \tag{20.6}$$

$d = \mathrm{Im}\, z - \epsilon_0$ とおくと，$\zeta \in C_\epsilon$ ならば，$|\zeta - z| \geq d$. $M = \sup_{\bar{R}_1} |f(\zeta)|$ とおくと

$$\left| \int_{\beta B} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leq \frac{M}{d} |\beta - B| = \frac{M}{d}\epsilon, \qquad \left| \int_{\alpha A} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leq \frac{M}{d} |\alpha - A| = \frac{M}{d}\epsilon. \tag{20.7}$$

$g(\zeta) = f(\zeta)/(\zeta - z)$ とおくと，$g(\zeta)$ は $R(\alpha, \beta; 0, \epsilon_0)$ の閉包で連続ゆえ，そこで一様連続でもある。$m(\epsilon) = \max\{|g(x) - g(x + i\epsilon)| : \alpha \leq x \leq \beta\}$ とおくと，$\lim_{\epsilon \to 0} m(\epsilon) = 0$. よって $\epsilon \to 0$ のとき，

$$\left| \int_{\alpha\beta} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{AB} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| = \left| \int_\alpha^\beta (g(x) - g(x + \epsilon)) dx \right| \leq (\beta - \alpha) m(\epsilon) \to 0.$$

これと (20.7) より，$\epsilon \to 0$ のとき，

$$\int_{C_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \to 0.$$

よって (20.5) と (18.6) より，(20.3) を得る。

次に $R_\epsilon = R(\alpha, \beta; -\gamma, -\epsilon)$ とすれば

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_\epsilon} \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

上と同様の議論により，この式において $\epsilon \to 0$ とすれば (20.4) を得る。 □

定理 20.3　領域 D_1 は上半平面にあって，その境界は実軸上の開区間 (a, b) を含むとする。$f(z)$ は D_1 で正則，$D_1 \cup (a, b)$ で連続，かつ (a, b) 上で実数値をとるとする。D_2 を実軸に関して D_1 と対称な領域とする。このとき，

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & (z \in D_1 \cup (a, b)) \\ \overline{f(\bar{z})} & (z \in D_2) \end{cases}$$

は $D = D_1 \cup (a, b) \cup D_2$ で正則である。

証明. $z \in D_2 \cup (a, b)$ に対して $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ とおく。$z \in D_2$ のとき，次の計算から g は z で微分可能であることがわかる。

$$\lim_{\zeta \to z} \frac{g(\zeta) - g(z)}{\zeta - z} = \lim_{\zeta \to z} \overline{\frac{f(\bar{\zeta}) - f(\bar{z})}{\bar{\zeta} - \bar{z}}} = \overline{f'(\bar{z})}.$$

したがって g は D_2 で正則。定義により g は $D_2 \cup (a, b)$ で連続で，$x \in (a, b)$ のとき $g(x) = \overline{f(\bar{x})} = f(\bar{z})$. よって定理 20.3 により F は D で正則である。 □

21 偏角の原理

21.1 有理型関数

定義 21.1　Ω を領域，$E(\subset \Omega)$ をその部分集合で E は D 内に集積点をもたないとする。$D \setminus E$ で正則で E の各点を除去可能特異点または極にもつ関数 $f(z)$ を Ω 上の**有理型関数**[*17](meromorphic function) と呼ぶ ($b \in E$ が除去可能特異点ならば $f(z)$ は b において正則な関数に拡張できる。したがって以下では E の点は極であるとする)。

21.2 偏角の原理

$f(z)$ を Ω 上の有理型関数とし，C を Ω 内の閉曲線で C の内部 D の点は Ω に含まれるとする。また C 上に $f(z)$ の零点および極は存在しないとする。以下 $f(z)$ は $D \cup C$ 上のみで考える。このとき

D 内の $f(z)$ の零点を $a_1,\ldots, a_m$　(a_k の位数を p_k とする)
D 内の $f(z)$ の極を $b_1,\ldots, b_n$　(b_k の位数を q_k とする)

とする。このとき

$$f(z) = \frac{(z-a_1)^{p_1}(z-a_2)^{p_2}\cdots(z-a_m)^{p_m}}{(z-b_1)^{q_1}(z-b_2)^{q_2}\cdots(z-b_n)^{q_n}}\varphi(z)$$

とおけば $\varphi(z)$ は D および C 上で正則でしかも零点をもたない。

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{p_k}{(z-a_k)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{(z-b_k)} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}. \tag{21.1}$$

ここで $\varphi'(z)/\varphi(z)$ は D の閉包で正則だから，コーシーの積分定理により

定理 21.1

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{m} p_k - \sum_{k=1}^{n} q_k = N - P \tag{21.2}$$

ただし $N = p_1 + \cdots + p_m$ は位数分だけ重複して数えた $f(z)$ の零点の個数，$P = q_1 + \cdots + q_n$ は位数分だけ重複して数えた極の個数である。

曲線 C の一つの径数表示を $z(t)$ $(0 \leq t \leq 1,\ z(0) = z(1))$ とする。$z(t)$ が C 上を一周するとき,$w(t) = f(z(t))$ は $w(0)$ から出発して像曲線 $f(C)$ 上にそって周回して再び $w(0) = w(1)$ に戻ってくるので $w(t)$ の偏角の総変化量 V

$$V = \int_0^1 \frac{d}{dt}(\arg w(t))\, dt = \int_C d\arg f(z)$$

[*17] 「ゆうりけいかんすう」と読む。

は 2π の整数倍になる。$V/2\pi$ を $f(C)$ の (原点のまわりの) **回転数**という。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\ dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f'(z(t))}{f(z(t))}z'(t)\ dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{d}{dt}\log f(z(t))\ dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{d}{dt}\log w(t)\ dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{d}{dt}(\log|w(t)| + i\arg w(t))dt \\
&= \frac{V}{2\pi} \quad (\because \quad \int_0^1 \frac{d}{dt}\log|w(t)|\ dt = \log|w(1)| - \log|w(0)| = 0)
\end{aligned}
$$

したがって

$$
N - P = \text{曲線 } f(C) \text{ の原点のまわりの回転数} \tag{21.3}
$$

とくに C の内部 D に $f(z)$ の極が存在しないとき（$f(z)$ が D で正則であるとき），D 内の $f(z)$ の零点の個数は $f(C)$ の原点のまわりの回転数に等しい。

21.3 ルーシェの定理

定理 21.2 (Rouché の定理) C, D は上の定理と同じとする。$f(z)$, $g(z)$ は C および D 上で正則で C 上

$$
|f(z)| > |g(z)| \quad (z \in C)
$$

が成り立つとする。このとき $f(z)$ と $f(z)+g(z)$ は D 内に同じ個数の零点をもつ。ただし零点は位数分だけ重複して数える。

証明. D 内の $f(z)$ と $f(z)+g(z)$ の零点の個数を N_f, N_{f+g} とおくと偏角の原理から

$$
\begin{aligned}
N_{f+g} &= \int_C d\arg(f(z)+g(z)) = \int_C d\arg f(z) + \int_C \arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) \\
&= \int_C d\arg f(z) = N_f.
\end{aligned}
$$

なぜなら $|g(z)|/|f(z)| < 1$ より $g(z)/f\,(z)$ による C の像曲線は 1 中心半径 1 の円板に含まれるので原点のまわりの回転数は 0 だからである。 □

定理 21.3 (代数学の基本定理・再録) $f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ($n \geq 1$, $a_n \neq 0$) は重複度を込めてちょうど n 個の零点をもつ。

証明. a_j/a_n を改めて a_j ($j = 0, 1, ..., n$) とおくことによって $a_n = 1$ と仮定してよい。

$$
F(z) = z^n, \qquad G(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0
$$

とおく。$F(z)$ はちょうど n 個の零点をもつ（0 において n 重の零点をもつ。）R を

$$
1 + |a_0| + |a_2| + \cdots + |a_{n-1}| < R
$$

をみたす任意の正数とすると，$|z| = R$ のとき，$1 < |z| < |z|^2 < \cdots < |z|^{n-1}$ ゆえ

$$
|G(z)| < (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|)|z|^{n-1} < |z|^n = |F(z)|.
$$

よってルーシェの定理により，$f(z) = F(z) + G(z)$ は, 0 中心半径 R の円の内部に n 個の零点をもつ。したがって $f(z)$ は $\mathbb{C}$ において，ちょうど n 個の零点をもつことがわかる。 □

21.4　開写像定理と逆関数の定理

定理 21.4　$f(z)$ は領域 D 上の定数でない正則関数で点 $a \in D$ で, k 位の零点をもつとする。このとき，ある正数 R が存在して次が成り立つ。任意の r $(0 < r < R)$ に対して，ある δ が存在して，$|w| < \delta$ をみたす任意の w に対して $f(z) = w$ をみたす点 z が円板 $\mathbb{D}(a, r)$ 内にちょうど k 個存在する。

証明. 一致の定理 20.1 により，ある R が存在して，$f(z)$ は $\{z : 0 < |z-a| < R\}$ において零点をもたない。$0 < r < R$ とし，C を円 $|z-a| = r$ とすると

$$\delta = \min\{|f(z)| : z \in C\}$$

は正数である。$|w| < \delta$ とすると, C 上で $|f(z)| > |w|$. ルーシェの定理により，$f(z)$ と $f(z)-w$ は $D(a, r)$ 内で同じ数の零点をもつ。したがって，$f(z) = w$ をみたす点 z が円板 $\mathbb{D}(a, r)$ 内にちょうど k 個存在する。 □

定理 21.5　（開写像定理）$f(z)$ は領域 D 上の定数でない正則関数で，U は D の開部分集合とする。このとき，$f(U)$ は開集合である。

証明. b を $f(U)$ の任意の点とする。$a \in U$ を $b = f(a)$ をみたす点とする。a における f のテイラー展開が

$$f(z) = b + c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \cdots$$

$(k \geq 1)$ であったとき，関数 $f(z) - b$ に定理 21.4 を応用すると，十分小さいすべての $r > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して, $|w-b| < \delta$ をみたす任意の w に対して $f(z) = w$ をみたす点 z が円板 $\mathbb{D}(a, r)$ 内にちょうど k 個存在する。r を $\mathbb{D}(a, r) \subset U$ となるように選んでおけば，これは $\mathbb{D}(b, \delta) \subset f(\mathbb{D}(a, r)) \subset f(U)$ を意味する。よって $f(U)$ は開集合である。 □

定理 21.6　（逆関数の定理）$f(z)$ は領域 D 上の正則関数で点 $a \in D$ で $f'(a) \neq 0$ とする。このとき，正数 ϵ が存在して f は $N = \mathbb{D}(a, \epsilon)$ で単射である。g を f を N に制限した関数の逆関数とすると，g は $f(N)$ で正則で，$w \in f(N)$ のとき，$g'(w) = 1/f'(z)$.

証明. $b = f(a)$ とする。a におけるテイラー展開

$$f(z) = b + f'(a)(z-a) + \cdots$$

において $f'(a) \neq 0$ ゆえ，定理 21.4 から次のことがいえる。ϵ_0 を十分小さい正数とするとき，ある $\delta_0 > 0$ が存在して，$|w-b| < \delta_0$ をみたす任意の w に対して $f(z) = w$ をみたす点 z が円板 $\mathbb{D}(a, \epsilon_0)$ 内にちょうど一つ存在する。この z を $g(w)$ と定めれば，$\mathbb{D}(b, \delta_0)$ 上の関数 g は $f(g(w)) = w$ をみたす。

　今，$0 < \epsilon < \epsilon_0$ をみたす任意の ϵ に対して C_ϵ を円 $|z-a| = \epsilon$ とし，$\delta(\epsilon) = \min\{|f(z) - b| : z \in C_\epsilon\}$ とおくと，$\delta(\epsilon) > 0$ であり，定理 21.4 の証明により，$|w-b| < \delta(\epsilon)$ のとき $f(z) = w$ をみたす $z \in \mathbb{D}(a, \epsilon)$ がただ一つ存在する。$\mathbb{D}(a, \epsilon) \subset \mathbb{D}(a, \epsilon_0)$ ゆえ，g の定義により $z = g(w)$. ゆえに $|w-b| < \delta(\epsilon)$ ならば $|g(w) - a| < \epsilon$ であり，g は b で連続である。

関数 f および f' は a で連続だから ϵ_1 $(0 < \epsilon_1 < \epsilon)$ を，$N = \mathbb{D}(a, \epsilon_1)$ とおくとき，$z \in N$ ならば $f'(z) \neq 0$ かつ $f(N) \subset \mathbb{D}(b, \delta_0)$ となるように選ぶことができる。$f(N)$ は g の定義域に含まれる。$z \in N$ のとき，$f'(z) \neq 0$ だから，上と同様にして g が $w = f(z)$ で連続であることを示すことができる。次に $w \in f(N)$ を固定し，$w = f(z)$ とする。今

$$A(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & (\zeta \neq z) \\[2ex] f'(z) & \zeta = z \end{cases}$$

とおくと $A(\zeta)$ は $\zeta = z$ で連続である。開写像定理により，w に十分近い ω は $f(N)$ に含まれる。$f(\zeta) = \omega$ とおく。$\omega \neq w$ ならば

$$f(\zeta) - f(z) = A(\zeta)(\zeta - z) \iff \omega - w = A(g(\omega))(g(\omega) - g(w)).$$

g は w で連続だから

$$\lim_{\omega \to w} \frac{g(\omega) - g(w)}{\omega - w} = \frac{1}{A(g(w))} = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{f'(z)}.$$

よって g は $f(N)$ で正則で，$w \in f(N)$ のとき，$g'(w) = 1/f'(z)$. □

21.5　練習問題

問題 21.1　Ω と $f(z)$ は 21.2 節と同じとする。$g(z)$ を Ω で正則な関数とするとき，次の等式を示せ。

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C g(z) \frac{f'(z)}{f(z)}\, dx = \sum_{k=1}^{m} g(a_k) p_k - \sum_{k=1}^{n} g(b_k) q_k \tag{21.4}$$

問題 21.2　$f(z)$ を有理関数とする。リーマン球面上の $f(z)$ の零点の個数と極の個数は同じであることを示せ。ただし n 位の零点および n 位の極はそれぞれ n 回重複して数える。

問題 21.3　方程式 $z^5 + 7z + 2 = 0$ の解は，単位円板内に一つ，円環領域 $\{z : 1 < |z| < 2\}$ 内に４つあることを示せ。

22 調和関数

22.1 調和関数

定義 22.1 $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域とする。$u \in C^2(D)$ が

$$\Delta u = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

をみたすとき，u は調和関数であるという。Δ はラプラシアンである。

複素平面の領域 D で定義された正則関数 $f(z)$ の実部 $u(x,y)$ と虚部 $v(x,y)$ を考えると，Cauchy-Riemann の方程式により

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

が成り立つので，$u(x,y)$ は調和関数である。$v(x,y)$ の $-if(z)$ の実部として調和関数である。$v(x,y)$ を $u(x,y)$ の**共役調和関数**という。

今，Ω を D に含まれる有限個の単純閉曲線の和 C で囲まれた部分領域とすると，グリーンの定理により

$$\int_C \left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right) = \iint_\Omega \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) dxdy = 0.$$

もし，D が単連結領域ならば，$(x_0, y_0) \in D$ を固定して，(x_0, y_0) から D の点 (x,y) に至る D 内の区分的にレギュラーな曲線 C に沿って積分

$$v(x,y) = \int_C \left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right)$$

を考えると，$v(x,y)$ は C の選び方によらずに定まり，$u(x,y)$ の共役調和関数になる。

例 22.1 $u(x,y) = \log(x^2+y^2)$ は第 1 象限 $\{(x,y) : x > 0, y > 0\}$ で調和である。実際

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

C を $(1,0)$ から $(x,0)$ を結ぶ線分 C_1 と $(x,0)$ から (x,y) を結ぶ線分 C_2 の和とすると，

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int_C \left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right) = \int_{C_1} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right) + \int_{C_2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right) \\ &= 0 + \int_0^y \frac{2xy}{x^2+y^2}dy \\ &= 2\arctan\frac{y}{x}. \end{aligned}$$

したがって，一般に $u(x,y)$ の共役調和関数は $2\arctan(y/x) + C$ (C は実定数) になる。

22.2　ポアソンの積分公式とその応用

定理 22.1　(ポアソン (Poisson) の積分公式) 領域 D で調和な関数 $U(x,y)$ に対して，$u(z)=U(x,y)$ $(z=x+iy)$ とおく。$\bar{D}(a,R)\subset D$ のとき, $z=a+re^{i\varphi}\in D(a,R)$ とすると

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}u(a+Re^{i\theta})d\theta. \tag{22.1}$$

とくに

$$u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+Re^{i\theta})d\theta. \tag{22.2}$$

証明. $v(x,y)$ を $u(x,y)$ の共役調和関数とし，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ とすると，コーシーの積分公式により, C を円 $|z-a|=R$ とすると,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{22.3}$$

$z^*=a+\dfrac{R^2}{\overline{\overline{z-a}}}$ を C に関する z の鏡像とすると

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z^*}\,d\zeta. \tag{22.4}$$

(22.3)−(22.4) により

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z^*}\right)\,d\zeta.$$

$\zeta=a+Re^{i\theta}$, $z=z+re^{i\varphi}$ とおくと，$z^*=a+\dfrac{R^2}{r}e^{i\varphi}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z^*}&=\frac{z-z^*}{(\zeta-z)(\zeta-z^*)}=\frac{\left(r-\frac{R^2}{r}\right)e^{i\varphi}}{(Re^{i\theta}-re^{i\varphi})(Re^{i\theta}-\frac{R^2}{r}e^{i\varphi})}\\&=\frac{R^2-r^2}{Re^{i\theta}(R-re^{i(\varphi-\theta)})(R-re^{i(-\varphi+\theta)})}\end{aligned}$$

よって

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)f(a+Re^{i\theta})}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta.$$

両辺の実部を比較して (22.1) を得る。 □

系 22.1　(Harnack の不等式) 定理 22.1 の設定の下で，さらに $u(z)\geq 0$ ならば

$$\frac{R-r}{R+r}u(a)\leq u(z)\leq\frac{R+r}{R-r}u(a).$$

証明. (22.1),(22.2) および

$$\frac{R-r}{R+r}\leq\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\leq\frac{R+r}{R-r}$$

から従う。 □

定理 22.2　(最大値の原理) $u(x,y)$ を領域 D で定義された調和関数とする。もし，$u(x,y)$ が D の内点で最大値をとれば $u(x,y)$ は定数である。

証明. $u(x,y)$ は D の内点で最大値をとると仮定すると，このとき，集合

$$A = \{z \in D : u(x,y) = m\}$$

は空でない。$u(x,y)$ は連続だから A は D の閉部分集合である。以下，D を複素平面の領域と見なし，$u(x,y)$ を $u(z)$ $(z = x+iy)$ と書くことにする。次に $a \in A$ とし，$\bar{D}(a,R) \subset D$ となる円板 $D(a,R)$ を取る。任意の r $(0 < r < R)$ に対してポアソンの積分公式より

$$\begin{aligned} 0 &= u(a) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+re^{i\theta})d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{u(a) - u(a+re^{i\theta})\right\} d\theta. \end{aligned}$$

$m = u(a)$ は最大値ゆえ $u(a) - u(a+re^{i\theta}) \geq 0$. $h(z)$ は連続だから，すべての θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ に対して $u(a) = u(a+re^{i\theta})$. よって $u(z)$ は円 $|z-a| = r$ 上で定数 m である。$r < R$ は任意だから $u(z)$ は円板 $D(a,R)$ 上で定数 m である。よって $D(a,R) \subset A$ であり，A は開集合。D は連結だから $D = A$. □

系 22.2　$u(x,y)$ を領域 D で定義された調和関数とする。もし，$u(x,y)$ が D の内点で最小値をとれば $u(x,y)$ は定数である。

$H(x,y)$ を領域 D で定義された調和関数とする。$h(z) = H(x,y)$ $(z = x+iy)$ とおく。

定理 22.3　(調和関数の等角不変性) 正則関数 $f : \Omega \to D$ と $h(z)$ の合成 $h(f(z))$ は調和関数である。

証明. $a \in \Omega$ を任意の点とし，円板 $D(a,r)$ $(\bar{D}(a,r) \subset \Omega)$ を，その f による像が $b = f(a)$ 中心半径 R の閉円板 $\bar{D}(b,R)$ が D に含まれるように選ぶ。$v(x,y)$ を $D(b,R)$ における $u(x,y)$ の共役調和関数とし，$g(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とおくと，$g(z)$ は $D(b,R)$ で正則である。$g(f(z))$ は $D(a,r)$ で正則なので，その実部 $h(f(z))$ は $D(a,r)$ で調和である。a は Ω の任意の点だから，$h(f(z))$ は Ω 上の調和関数である。□

注意　上の定理は $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $(z = x+iy)$ とおくとき，$H(u(x,y), v(x,y))$ が調和関数であることを云っている。このことはラプラシアンを計算することによっても示される。練習問題 22.1 参照。

22.3　単位円板上のディリクレ問題

単位円板上の **Poisson 核**を，$z \in \mathbb{D}$, $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ に対して

$$P(z,\zeta) = \zeta\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - 1/\bar{z}}\right) = \frac{1-|z|^2}{|z-\zeta|^2}$$

と定める。このとき，

(1) $z=x+iy$ のとき，$P(z,\zeta)$ は (x,y) の調和関数。

(2) 単位円板 $\mathbb{D}$ の自己等角写像

$$A(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\ (|a|<1)$$

(A は閉円板 $\bar{\mathbb{D}}$ からそれ自身への同相写像に拡張できる) に対して

$$P(z,\zeta)=P(A(z),A(\zeta))|A'(\zeta)|. \tag{22.5}$$

(3)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(z,e^{i\theta})d\theta=1. \tag{22.6}$$

(4) 任意の $\delta>0$ に対して $z\in\mathbb{D}$ が $|z-\zeta|>\delta$ をみたしながら $|z|\to 1$ であるとき，$P(z,\zeta)$ は一様に 0 に収束する。

(3) を示す。$A(z)=0$ をみたす $\mathbb{D}$ の自己等角写像 A を用いると，(22.5) より

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}P(z,e^{i\theta})d\theta&=\int_C P(z,\zeta)|d\zeta|=\int_C P(A(z),A(\zeta))|A'(\zeta)d\zeta|\quad (C\text{ は単位円周})\\&=\int_C P(0,\zeta)|d\zeta|=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi.\end{aligned}$$

定理 22.4 (単位円板上のディリクレ問題) $f(e^{i\theta})$ は単位円周上の連続関数とする。このとき

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(z,e^{i\theta})f(e^{i\theta})d\theta \tag{22.7}$$

は $\mathbb{D}$ で調和でかつ $u(e^{i\theta})=f(e^{i\theta})$ とおけば u は $\bar{\mathbb{D}}$ で連続である。

証明. $z=x+iy,\ \zeta=\xi+i\eta$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}P(z,\zeta)&=\frac{-2x}{|\zeta-z|^2}+\frac{2(1-|z|^2)(\xi-x)}{|\zeta-z|^4},\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}P(z,\zeta)&=\frac{-2}{|\zeta-z|^2}-\frac{8x(\xi-x)}{|\zeta-z|^4}-\frac{2(1-|z|^2)}{|\zeta-z|^4}+\frac{8(1-|z|^2)(\xi-x)^2}{|\zeta-z|^6},\end{aligned}$$

および y 偏導関数についても同様に得られる式より，$P(z,\zeta)$ の x, y に関する 2 階までの導関数は単位円周 $C:|\zeta|=1$ 上連続である。よって Δ を (x,y) についてのラプラシアンとすると

$$\Delta u(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_C(\Delta P(z,\zeta))f(\zeta)|d\zeta|=0.$$

$|\zeta_0|=1$ とする。ϵ を任意の正数とすると，$f(\zeta)$ は連続だから，$M=\sup\{|f(\zeta)|:|\zeta|=1\}$ は有限値であり，さらに $\delta>0$ を十分小さく取って，I_δ を単位円周 C の円板 $\mathbb{D}(\zeta_0,2\delta)$ に含まれる部分の弧とすると，$\zeta\in I_\delta$ ならば $|f(\zeta)-f(\zeta_0)|<\epsilon/(2M+1)$ が成り立つ。J_δ を C から I_δ を除いた残りの弧とする。もし z が ζ_0 に十分近くて，$|z-\zeta_0|<\delta$ かつ $1-|z|<\delta^2\epsilon/(4M+2)$ をみたせば, J_δ 上の ζ に対して

$$P(z,\zeta)=\frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}<\frac{2(1-|z|)}{\delta^2}<\frac{\epsilon}{2M+1}.$$

$$\left|f(\zeta_0) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) f(e^{i\theta}) d\theta\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})(f(\zeta_0) - f(e^{i\theta}))d\theta\right|$$

を上から評価する

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})|f(\zeta_0) - f(e^{i\theta})|d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_C P(z,\zeta)|f(\zeta_0) - f(\zeta)||d\zeta| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{I_\delta} P(z,\zeta)\epsilon|d\zeta| + \frac{1}{2\pi}\int_{J_\delta} \frac{\epsilon\cdot 2M}{2M+1}|d\zeta| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_C P(z,\zeta)\epsilon|d\zeta| + \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\epsilon\cdot 2M}{2M+1}|d\zeta| = \epsilon.\end{aligned}$$

よって $z \to \zeta_0$ のとき $u(z) \to f(\zeta_0)$. したがって $u(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ とおけば $u(z)$ は $\bar{\mathbb{D}}$ で連続である。 □

22.4 練習問題

問題 22.1 定理 22.1 と同じ設定の下で, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $(z = x + iy)$ とおくとき, $U(x,y) = H(u(x,y), v(x,y))$ が調和関数であることを, U のラプラシアンが 0 になることを示すことによって証明せよ。

問題 22.2 円環領域 $D = \{z : R_1 < |z| < R_2\}$ において $u(z)$ は調和であるとする。

(1) r $(R_1 < r < R_2)$ の関数

$$A(r) = \int_{\kappa(0,r)} r\frac{\partial u}{\partial r}d\theta, \quad B(r) = \int_{\kappa(0,r)} u\ d\theta - r\log r\int_{\kappa(0,r)} \frac{\partial u}{\partial r}d\theta$$

は定数であることを示せ。ここで $\kappa(0,r)$ は 0 中心半径 r の円に正の向きを与えたもので, そのパラメータを $z = re^{i\theta}$ とするとき

$$\int_{\kappa(0,r)} f(re^{i\theta})d\theta = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\ d\theta$$

である。

(2) 定数 a, b が存在して $R_1 < r < R_2$ に対して

$$\int_{\kappa(0,r)} u\ d\theta = a\log r + b$$

となることを示せ。

23 無限乗積

23.1 無限乗積の収束

無限複素数列 a_n $(n = 1, 2, \cdots)$ を考える。

定義 23.1 (無限乗積の収束) (1) すべての n に対して $a_n \neq 0$ のとき。

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \cdots a_n$$

が 0 でない複素数 p に収束するとき，$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ は**収束する**といい，$p = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$ と表す。
(2) $a_n = 0$ となる n が有限個しかないとき。ある n_0 が存在して $n \geq n_0$ ならば $a_n \neq 0$ である。$p = \prod_{n=n_0}^{\infty} a_n$ が (1) の意味で収束するとき，$\prod_{n=n_0}^{\infty} a_n = 0$ とする。
(3) 上の (1),(2) 以外の場合は $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ は**発散する**という。

注意 23.1 したがって $a_n = 0$ となる n が無限個あるとき，$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散することになる。

補題 23.1 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$

証明. 仮定より，ある n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば $a_n \neq 0$ でかつ，$p_n = \prod_{k=n_0}^{n} a_k$ は $n \to \infty$ のとき，ある $p \neq 0$ に収束する。よって $n > n_0$ として, $n \to \infty$ とすると

$$a_n = \frac{\prod_{k=n_0}^{n} a_k}{\prod_{k=n_0}^{n-1} a_k} = \frac{p_n}{p_{n-1}} \to \frac{p}{p} = 1.$$

23.2 無限乗積の収束判定法

無限乗積 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$a_n \to 1$ $(n \to \infty)$ だから，これからは，a_n を $1 + a_n$ で置き換えた無限乗積 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ を考えることとする。この無限乗積が収束するための必要条件は $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ である。以下，対数関数 $\log z$ は主枝 $\log|z| + i \arg z$ $(-\pi < \arg z \leq \pi)$ を表すものとする。

定理 23.1 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ が収束するための必要十分条件は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$ が収束することである。

証明. $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k)$, $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log(1 + a_k)$ とおく。 s_n が収束して $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ ならば $p_n = e^{s_n}$ により $\lim_{n\to\infty} p_n = e^s$. すなわち $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ は収束する。

逆に $p = \lim_{n\to\infty} p_n \neq 0$ とする。 このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, よって $\lim_{n\to\infty} \arg(1 + a_n) = 0$ である。 $p \in (-\infty, 0)$ ならば -1 を 1 つの項として $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ に乗じ，$i\pi$ を 1 つの項として $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$ に加えればいいので，$p \notin (-\infty, 0)$ とする。このとき $\lim_{n\to\infty} \log p_n = \log p$ であ

る。$p_n = \prod_{k=1}^n (1+a_k)$ よりある整数 k_n が存在して

$$\log p_n = \sum_{k=1}^n \log(1+a_k) + 2k_n\pi i$$

(対数は主枝に限定して考えていることに注意。) これより

$$\log p_{n+1} - \log p_n = \log(1+a_{n+1}) + 2(k_{n+1}-k_n)\pi i$$

この等式の虚部をとって

$$\arg p_{n+1} - \arg p_n = \arg(1+a_{n+1}) + 2(k_{n+1}-k_n)\pi$$

ここで $\lim_{n\to\infty}(\log p_{n+1} - \log p_n) = \log p - \log p = 0$ かつ $\lim_{n\to\infty}\arg(1+a_n) = 0$ だから $\lim_{n\to\infty}(k_{n+1}-k_n) = 0$. したがってある N が存在して $n \geq N$ ならば $k_n = k$(一定). よって

$$s_n = \log p_n - 2k_n\pi i \to \log p - 2k\pi i \qquad (n\to\infty)$$

すなわち s_n は収束する。 □

定義 23.2 (無限乗積の収束) (1) すべての n に対して $a_n \neq -1$ とする。$\prod_{n=1}^\infty (1+|a_n|)$ が収束するとき，$\prod_{n=1}^\infty (1+a_n)$ は**絶対収束する**という。

補題 23.2 $|z| < 1/2$ のとき

$$\frac{|z|}{2} \leq |\log(1+z)| \leq \frac{3|z|}{2}. \tag{23.1}$$

証明. $z=0$ のときは明かなので，$z \neq 0$ とする。$|z|<1/2$ ゆえ

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}.$$

よって，(23.1) は次式より得られる。

$$\begin{aligned}\left|1 - \frac{\log(1+z)}{z}\right| &= \left|\sum_{n=2}^\infty (-1)^n \frac{z^{n-1}}{n}\right| \leq \sum_{n=2}^\infty \frac{|z|^{n-1}}{n} \\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{n=2}^\infty |z|^{n-1} < \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

定理 23.2 次の3つの条件は互いに同値である。

(1) $\prod_{n=1}^\infty (1+a_n)$ は絶対収束する。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty |a_n| < \infty$,

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty |\log(1+a_n)| < \infty$

証明. (1),(2),(3) のどの条件からも，それが成り立てば有限個の n を除いて $|a_n| < 1/2$ が従うので，すべての n に対して $|a_n| < 1/2$ であると仮定してよい。このとき，

$$
\begin{aligned}
\textstyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \text{ は絶対収束する。} &\iff \textstyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|) \text{ は収束する。} \\
&\iff \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+|a_n|) \text{ は収束する。}(\because \text{定理 } 23.1) \\
&\iff \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ は収束する。}(\because (23.2)) \\
&\iff \sum_{n=1}^{\infty} |\log(1+a_n)| \text{ は収束する。}(\because (23.2))
\end{aligned}
$$

□

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\log(1+a_n)|$ が収束すれば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$ は収束するから，

系 23.1 絶対収束する無限乗積 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ は収束する。

例 23.1

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

部分積を計算すると

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

ここで $n \to \infty$ とすればよい。

例 23.2 $|z| < 1$ のとき

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots = \frac{1}{1-z}.$$

部分積を計算すると

$$S_n = (1+z)(1+z^2)\cdots(1+z^{2^n}) = 1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2^{n+1}-1} = \frac{1-z^{2^{n+1}}}{1-z}.$$

ここで $n \to \infty$ とすればよい。

23.3 $\sin \pi z$ の無限積表示

$\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ において

$$\log(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \cdots$$

で右辺の級数は局所絶対一様収束する。自然数 N に対して $2|z| < N$ ならば，$n \geq N$ のとき

$$\left|\log\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}\right| \leq \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{|z|}{n}\right)^k \leq \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{|z|}{n}\right)^k < \frac{|z|^2}{n^2}.$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するから

$$\prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n}$$

(0 以外の整数 n についての和) は整関数となる。$\sin\pi z$ の零点は整数点でそれらはすべて 1 位の零点ゆえ

$$\sin\pi z = ze^{g(z)}\prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n} \tag{23.2}$$

の形になる。$g(z)$ は整関数である。両辺の対数の微分を取ると

$$\pi\cot\pi z = \frac{1}{z}+g'(z)+\sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right). \tag{23.3}$$

さらに両辺を微分して

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z} = -g''(z)+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^2}.$$

補題 23.3　$g'(z)$ は定数である。

証明. $g''(z)=0$ であることを示す。

$$g''(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^2}-\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}$$

は周期 1 をもつから，$T=\{z=x+iy : 0\leq x\leq 1\}$ において $g''(z)$ が有界であることをいえばよい。$|n|>2$ のとき

$$\frac{1}{|z-n|^2}=\frac{1}{(x-n)^2+y^2}\leq\frac{1}{(x-n)^2}\leq\frac{1}{(|n|-1)^2}.$$

$\displaystyle\sum_{|n|\geq 2}\frac{1}{(|n|-1)^2}$ は収束するから，任意の整数 ϵ に対して，自然数 N を十分大きく取れば

$$\sum_{|n|>N}\frac{1}{|z-n|^2}<\frac{\epsilon}{2},\ (z\in T)$$

$(2N+1)/N^2<\epsilon/2$ となるようによっておくと，$z\in T$ が $|\mathrm{Im}\,z|>2N$ をみたすとき，

$$\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{|z-n|^2}\leq\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{||z|-|n||^2}<\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{N^2}=\frac{2N+1}{N^2}<\frac{\epsilon}{2}.$$

よってこのとき，

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|z-n|^2}<\epsilon.$$

一方

$$|\sin\pi z|=\left|\frac{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}{2i}\right|\geq\frac{||e^{i\pi z}|-|e^{-i\pi z}||}{2}=\frac{e^{\pi|y|}-e^{-\pi|y|}}{2}.$$

より，$z \in T$ に対して $|\mathrm{Im}\, z|$ が十分大きいとき

$$\frac{\pi^2}{|\sin^2 \pi z|} < \epsilon.$$

よって $g''(z)$ は T で，したがって $\mathbb{C}$ で有界であり，Liouville の定理より定数である。また上の計算より T の内部で $z \to \infty$ とすると $g''(z) \to 0$ だから，恒等的に $g''(z) = 0$ である。 □

補題により (23.3) は

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + C + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right). \tag{23.4}$$

$g'(z) = C$ は定数である。$z{-}0$ の近傍で $z \cos z - \sin z = -\dfrac{z^3}{3} + \cdots$ ゆえ $\displaystyle\lim_{z \to 0} \left(\pi \cot \pi z - \frac{1}{z} \right) = 0.$ (23.4) で $z \to 0$ として $C = 0$(よって $g(z)$ は定数であることも) がわかる。したがって

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right). \tag{23.5}$$

(23.2) は

$$\sin \pi z = e^{C_1} z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n} \right) e^{z/n}.$$

両辺を z で割って $z \to 0$ とすることにより，$e^{C_1} = \pi$.

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n} \right) e^{z/n} = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n} \right) \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{z/n} e^{-z/n}.$$

すなわち，

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right). \tag{23.6}$$

例 23.3　整関数の無限積表示のよく知られている例としてガンマ関数の逆数がある。**ガンマ関数**は $\mathrm{Re}\, z > 0$ のときは

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \tag{23.7}$$

で定まり，関係式

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

を用いて $\mathbb{C}$ 上の有理形関数に拡張したものである。$1/\Gamma(z)$ は $z = 0, -1, -2, \cdots$ で 1 位の零点をもつ整関数である。$1/\Gamma(z)$ は次のように表される*18。

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n}. \tag{23.8}$$

ここで

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right)$$

は Euler の定数である。

*18 複素解析学ノート補遺 23.2

一般の整関数については Weierstrass の因数分解定理が知られている。正整数 p に対して関数

$$E(z,p) = (1-z)\exp\left[\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right] \tag{23.9}$$

を定める。$f(z)$ は整関数で

- $z=0$ で $m(\geq 0)$ 位の零点をもち，他に
- a_1, a_2, a_3, $\ldots$ $(0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_k| \leq |a_{k+1}| \leq \cdots,\ \lim_{k\to\infty}|a_k| = +\infty)$ を零点にもつとする。ただし m 位の零点は $\{a_n\}$ の中に m 回重複して現れるとする。

このとき,

定理 23.3 (Weierstrass の因数分解定理) ある正整数 m_n と整関数 $g(z)$ が存在して

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, m_n\right). \tag{23.10}$$

23.4 練習問題

問題 23.1 $\cos\pi z = \sin(2\pi z)/(2\sin\pi z)$ を利用して次を示せ。

$$\cos\pi z = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right). \tag{23.11}$$

問題 23.2 (23.8) を用いて次を示せ。

(1) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin\pi z}$

(2) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

24 正規族

24.1 正規族

定義 24.1 $\mathcal{F}$ を $\mathbb{C}$ の部分領域 D 上で定義された正則関数族とする。$\mathcal{F}$ の元からなる任意の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，ある部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が D 上で局所一様収束するとき，$\mathcal{F}$ を**正規族**であるという。

次に $\mathcal{F}$ が正規族であるための十分条件を与える。以下，$\mathcal{F}$ を $\mathbb{C}$ の部分集合 D 上で定義された関数族とする (当面，正則性は仮定しない)。

定義 24.2 $\mathcal{F}$ が**同等連続** (equicontinuous) であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して $z, w \in D$ が $|z - w| < \delta$ をみたせば，任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して

$$|f(z) - f(w)| < \epsilon$$

が成り立つときにいう。

定理 24.1 **(Arzelà-Ascoli の定理)** コンパクト集合 D 上で上で定義された関数列 $\mathcal{F} = \{f_n(z)\}$ が同等連続で，かつ各点 $z \in D$ において $\{f_n(z)\}$ が有界ならば $\mathcal{F}$ は D で一様収束する部分列を含む。

証明. $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ を D において稠密な点列とする。仮定から $\{f_n(a_1)\}$ は有界だから，Bolzano-Weierstrass の定理により，$\mathcal{F}$ の部分列 $\mathcal{F}_1 = \{f_{1k}\}$ が存在して $\{f_{1k}(a_1)\}$ は収束する。次に $\{f_{1k}(a_2)\}$ は有界だから，やはり $\mathcal{F}_1$ の部分列 $\mathcal{F}_2 = \{f_{2k}\}$ が存在して $\{f_{2k}(a_2)\}$ は収束する。以下，これを繰り返すと関数列 $\mathcal{F}_m = \{f_{mk}\}$ が存在して

- $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{F}_m \supset \mathcal{F}_{m+1} \supset \cdots$,
- $\{f_{mk}(a_m)\}(k = 1, 2, ...)$ は収束点列。

関数列 $\{f_{kk}\}$ を考えると，$k \geq m$ のとき $f_{kk} \in \mathcal{F}_m$ だから，任意の m に対して $f_{kk}(a_m)(k = 1, 2, ...)$ は収束する。以下，改めて $f_k(z) = f_{kk}(z)$ とおく。同等連続性により，任意の $\epsilon > 0$ に対して δ が存在して $z, w \in D$ が $|z - w| < \delta$ をみたせば

$$|f_k(z) - f_k(w)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

$\{\mathbb{D}(a_k, \delta)\}$ は D の開被覆であるから，D のコンパクト性により，番号をつけ直すことによって

$$D \subset \mathbb{D}(a_1, \delta) \cup \mathbb{D}(a_2, \delta) \cup \cdots \cup \mathbb{D}(a_M, \delta)$$

としてよい。M 個の点列 $\{f_k(a_m)\}$ $(m = 1, 2, ..., M)$ はそれぞれ収束列だから，ある番号 N が存在して $N < k < \ell$ ならば

$$|f_\ell(a_m) - f_k(a_m)| < \frac{\epsilon}{3} \quad (m = 1, 2, ..., M)$$

が成り立つ。$z \in D$ とする。$z \in \mathbb{D}(a_m)$ となる m $(1 \leq m \leq M)$ を選ぶと

$$|f_k(z) - f_\ell(z)| \leq |f_k(z) - f_k(a_m)| + |f_k(a_m) - f_\ell(a_m)| + |f_\ell(a_m) - f_\ell(z)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

したがって $\{f_k(z)\}$ は関数列としてコーシー列となるので一様収束する。 $\square$

24.2 Montel の定理

定義 24.3（局所一様有界） D 上の関数族 $\mathscr{F}$ が**局所一様有界**であるとは，各点 $a \in D$ に対して，正数 r と M があって任意の $f \in \mathscr{F}$ に対して，$z \in \mathbb{D}(a, r)$ ならば $|f(z)| \leq M$ が成り立つときにいう。

定理 24.2（Montel の定理） 領域 D 上で正則な関数からなる族 $\mathscr{F}$ が局所一様有界ならば，$\mathscr{F}$ は正規族である。

証明. 条件から D の任意のコンパクト部分集合 K に対してある正数 M が存在して, すべての $f \in \mathcal{F}$ に対して

$$|f(z)| \leq M \quad (z \in K)$$

が成り立つことに注意する。F_0 を D の部分領域で D 内にある有限個の区分的にレギュラーな閉曲線の和 C で囲まれているとする。F_1 を $\overline{F_1} \subset F_0$ をみたす集合とする。このとき，$\mathcal{F}$ は F_1 上で同等連続である。なぜなら, $M = \max\{|f(z)| : z \in C\}$ は有限値であり，L を C の長さ, d を F_1 と C との距離とすると，$z, w \in F_1$ に対してコーシーの積分公式により

$$\begin{aligned}|f(z) - f(w)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w}\right) d\zeta\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_C \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z||\zeta - w|}|\zeta|\right)|z - w| \leq \frac{ML}{2\pi d^2}|z - w|\end{aligned}$$

が成り立ち，任意の $\epsilon > 0$ に対して $|z - w| < (2\pi d^2/ML)\epsilon$ ならば $|f(z) - f(w)| < \epsilon$ となるからである。D の部分領域の列 D_k $(k = 1, 2, ...)$ を

- D_k の境界は有限個の区分的にレギュラーな閉曲線の和 C_k であり,
- $\overline{D_k} \subset D_{k+1}$, $D = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$

をみたすようにとる。D_k と C_{k+1} をそれぞれ F_1 と C として上の議論を応用すると $\mathcal{F}$ は各 $\overline{D_k}$ で同等連続であることが分かる。よって定理 24.1 により, 関数列 $\mathcal{F}_k = \{f_{k\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$ が存在して

- $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{F}_k \supset \mathcal{F}_{k+1} \supset \cdots$,
- $\{f_{k\ell}\}(\ell = 1, 2, ...)$ は D_k で一様収束する。

関数列 $\{f_{\ell\ell}\}$ を考えると，$\ell \geq k$ のとき $f_{\ell\ell} \in \mathcal{F}_k$ だから，任意の k に対して $f_{\ell\ell}$ は D_k 上で一様収束する。 $\square$

24.3 複素力学系

ここでは $d(\geq 2)$ 次の多項式

$$f(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

の反復合成の力学系を考える。f の n 回合成

$$\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\,\text{回}}(z)$$

を断らないかぎり $f^n(z)$ で表す（f の n 乗でないことに注意。）よって $f(z) = z^2 + c$ (c は定数) のときは

$$\begin{aligned} f^2(z) &= (z^2+c)^2 + c = z^4 + 2cz^2 + c^2 + c, \\ f^3(z) &= (z^4 + 2cz^2 + c^2 + c)^2 + c \\ &= z^8 + 4cz^6 + (6c^2 + 2c)z^4 + (4c^3 + 4c^2)z^2 + (c^4 + 2c^3 + c^2 + c). \end{aligned}$$

定義 24.4　点 $z_0 \in \mathbb{C}$ が f の Fatou 集合 $F(f)$ に属するとは，関数列 $\mathscr{F} = \{f^n\}$ が $z_0 \in \mathbb{C}$ のある近傍で正規族となるか，あるいは一様に無限遠点に発散するときにいう。$F(f)$ の補集合 $J(f)$ を f の Julia 集合という。

定義 24.5 **（周期点）**　点 $z_0 \in \mathbb{C}$ はある正整数 n があって $f^n(z_0) = z_0$ となるとき，f の**周期** n の**周期点**という。$f^n(z_0) = z_0$ となる最小の正整数 p を z_0 の**素周期**という。z_0 の周期は素周期の整数倍になる。特に $p = 1$ のとき z_0 は f の**不動点**という。$\lambda = (f^p)'(z_0)$ を f の z_0 での**乗法因子** (multiplier) という。このとき z_0 のまわりで f^p は

$$(f^p)(z) = z_0 + \lambda(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots$$

と展開される。合成関数の微分により

$$\lambda = f'(f^{p-1}(z_0))f'(f^{p-2}(z_0)) \cdots f'(f(z_0))f'(z_0).$$

この式の z_0 を $f^k(z_0)$ $(k = 1, 2, ..., p-1)$ に置き換えても値は変わらないから λ は z_0 の軌道 z_0, $f(z_0)$,..., $f^{p-1}(z_0)$ の各点での f の乗法因子である。

(1)　$|\lambda| > 1$ のとき，z_0 を**反発周期点**という。
(2)　$|\lambda| = 1$ のとき，z_0 を**中立周期点**という。
(3)　$|\lambda| < 1$ のとき，z_0 を**吸引周期点**という。とくに $\lambda = 0$ のとき**超吸引周期点**という。

複素力学系に関する話題としてここでは Schröder の関数方程式を取り上げる。

定理 24.3　原点の近傍で定義された正則関数 $f(z)$ が

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \quad (0 < |\lambda| < 1 \text{ または } |\lambda| > 1) \tag{24.1}$$

と展開されるとき，原点の近傍 U と等角写像 $\varphi : U \to \mathbb{C}$ で $\varphi(0) = 0$ かつ Schröder の方程式

$$f(\varphi(z)) = \varphi(\lambda z) \tag{24.2}$$

をみたすものが存在する。

証明. ([2, 3.4]) $|\lambda| > 1$ のときは 0 の近傍で定まる $f(z)$ の逆関数を考えることにより $0 < |\lambda| < 1$ としてよい。以下，これを仮定する。次に $|a_k| < 1$ $(k = 2, 3, ...)$ としてよいことを示す。$\rho > 0$

を (24.1) の収束半径より小さく取ると $|a_k|\rho^k < M$ となる定数 M がある。$\rho > \mu > 0$ とし $\varphi_0(z) = \mu z$ とおくと

$$\varphi_0^{-1}(f(\varphi_0(z))) = \lambda z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \mu^{k-1} z^k.$$

ここで

$$|a_k \mu^{k-1}| < \frac{M}{\mu}\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^k \leq \frac{M}{\mu}\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2.$$

よってさらに $\mu < \rho^2/M$ となるように選ぶと $|a_k\mu^{k-1}| < 1$. $(k \geq 2)$ 定理の証明には $f(z)$ の代わりに $\varphi_0^{-1} \circ f \circ \varphi_0$ を考えればよいから，以下 $|a_k| < 1$ とする。

$\varphi(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$ とおく。(24.4) から

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\lambda^k - \lambda) c_k z^k = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \varphi(z)^k. \tag{24.3}$$

これを形式的に解くと

$$c_2 = \frac{a_2}{\lambda^2 - \lambda}, \qquad c_3 = \frac{2a_2c_2 + a_3}{\lambda^3 - \lambda},$$

一般に正整数係数多項式 $P_k(a_2, ..., a_k, c_2, ..., c_{k-1})$ が存在して

$$c_k = \frac{P_k(a_2, ..., a_k, c_2, ..., c_{k-1})}{\lambda^k - \lambda}$$

となる。

$$c = |\lambda| - |\lambda|^2$$

とおくと，すべての $k \geq 2$ に対して $c \leq |\lambda^k - \lambda|$. 0 を中心として収束半径 1 をもつ整級数

$$w - \frac{1}{c}\sum_{k=2}^{\infty} w^k$$

の逆関数を $\psi(z)$ とおく。$\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$ ゆえ

$$\psi(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k z^k$$

の形の展開をもち，ψ の定義により

$$\sum_{k=2}^{\infty} c\alpha_k z^k = \sum_{k=2}^{\infty} (\psi(z))^k.$$

これは (24.3) の c_k, a_k, $\lambda^k - \lambda$ をそれぞれ α_k, 1, c に置き換えたものだから

$$\alpha_k = \frac{P_k(1, ..., 1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1})}{\lambda^k - \lambda}.$$

ここで

$$\alpha_2 = 1/c \geq \frac{1}{|\lambda^2 - \lambda|} > \frac{|a_2|}{|\lambda^2 - \lambda|} = |c_2|.$$

$P_k(a_2,...,a_k,c_2,...,c_{k-1})$ は正整数係数多項式だから，帰納的に $\alpha_k > 0$ がわかり，さらに帰納法によって

$$\begin{aligned}|c_k| &= \frac{|P_k(a_2,...,a_k,c_2,...,c_{k-1})|}{|\lambda^k-\lambda|} \leq \frac{P_k(1,...,1,|c_2|,...,|c_{k-1}|)}{c} \\ &\leq \frac{P_k(1,...,1,\alpha_2,...,\alpha_{k-1})}{c} = \alpha_k.\end{aligned}$$

したがって $\sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k$ は 0 の近傍で収束する優級数をもつ。したがって $\varphi(z)$ は 0 のある近傍 U で正則関数を表し，(24.4) をみたす。 □

注意 24.1　原点の近傍で定義された正則関数が

$$f(z) = a_k z^k + a_{k+1}z^{k+1} + a_{k+2}z^{k+2} + \cdots \quad (k \geq 2, a_k \neq 0)$$

と展開されるとき，原点の近傍 U と等角写像 $\varphi : U \to \mathbb{C}$ で $\varphi(0) = 0$ で

$$f(\varphi(z)) = \varphi(z^k) \tag{24.4}$$

をみたすものが存在する (Böttcher)。

定理 24.3 および Böttcher の定理により，z_0 が多項式 $f(z)$ の周期 p の吸引的周期点とすると，z_0 のある近傍 U 上で $f^{np}(z)$ $(n = 1, 2, ...)$ は一様に z_0 に収束する。よって U は f の Fatou 集合に含まれる。

$$A(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : \text{ある非負整数 } n \text{ があって } f^n(z) \in U\}$$

を z_0 の**吸引鉢**という。$A(z_0)$ は周期軌道 z_0, $f(z_0)$,..., $f^{p-1}(z_0)$ を含む。$A(z_0)$ は $F(f)$ のいくつかの (無限個の場合もある) 成分の和集合である。一方，$f(z)$ の反発的周期点は Julia 集合に含まれる。さらに次のことが成り立つことが分かっている。

定理 24.4　Julia 集合 $J(f)$ は f の反発的周期点の集合の閉包である。

$c = 0.6i$ のとき，$f(z) = z^2 + c$ は吸引不動点 $a = \dfrac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$ と反発不動点 $b = \dfrac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$ をもつ。

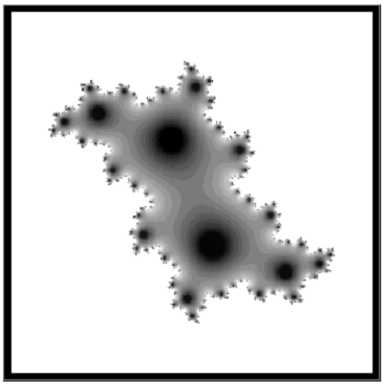


図 4　$z^2 + c$ $(c = 0.6i)$ の a の吸引鉢

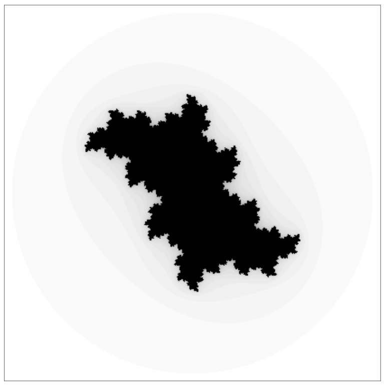


図 5　$z^2 + c$ $(c = 0.6i)$ の充填 Julia 集合

図 4 は a を中心とした十分小さい円板 D(ここでは $D = \{z : |z - a| < 0.1\}$ とした) を考え，各 $z \in \mathbb{C}$ に $\min\{n \geq 0 : f^n(z) \in D\}$ の値に応じて彩色を行ったもので灰色部分が a の吸引蜂である。図の作成には数式処理ソフトウェアの Mathematica を用いた。図 4 の白い部分は $f^n(z) \to \infty$ $(z \in \infty)$ となる点 z の集合で，その補集合 K が図 5 で黒色で表されている。K は f の充填 Julia 集合と呼ばれ，K の境界が Julia 集合 $J(f)$ である。c の値をいろいろ変えて $f_c(z) = z^2 + c$ の Julia 集合の形を観察するとよい。

24.4　練習問題

問題 24.1　D を領域とするとき，

- D_k の境界は有限個の区分的にレギュラーな閉曲線の和 C_k であり，
- $\overline{D_k} \subset D_{k+1}$, $D = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$

をみたす D の部分領域の列 $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在することを示せ。

練習問題解答

第 1 章の問題

問題 1.1　(a)　$7-i$

(b)　$-i$

(c)　$\sqrt{5}$

(d)　$\mathrm{Re}\,(w^3+w)=4, \quad \mathrm{Im}\,(w^3+w)=-12$

(e)　$-2+3i$

問題 1.2

$$(1+i+i^2+i^3)+(i^4+i^5+i^6+i^7)+\cdots+(i^{96}+i^{97}+i^{98}+i^{99})+(i^4)^{25}=1.$$

問題 1.3　(a)　$4-4i=4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

(b)　$2i=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

(c)　$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

(d)　$-2=2(\cos\pi+i\sin\pi)$

(e)　$2i(\sqrt{3}-i)=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

問題 1.4

$$(1+i)^6=\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^6=-8i$$

問題 1.5

$$\begin{aligned}|z+w|^2&=(z+w)(\bar{z}+\bar{w})=|z|^2+z\bar{w}+\bar{z}w+|w|^2\\&=|z|^2+z\bar{w}+\overline{z\bar{w}}+|w|^2=|z|^2+2\mathrm{Re}\,(z\bar{w})+|w|^2\\&\le|z|^2+2|z||w|+|w|^2=(|z|+|w|)^2.\quad(\because(1.1))\end{aligned}$$

ここで $|z+w|$ と $|z|+|w|$ は非負実数だから，$|z+w|\le|z+w|$. この結果を用いると

$$|z|=|(z+w)+(-w)|\le|z-w|+|-w|=|z-w|+|w|$$

より, $|z|-|w|\le|z+w|$. z と w の役割を入れ替えて $|w|-|z|\le|z+w|$. よって $||z|-|w||\le|z+w|$.

問題 1.6　(1)

$$\begin{aligned}\left|sz_1-\frac{1}{s}z_2\right|^2-|z_1-z_2|^2&=(s^2-1)|z|^2+\left(\frac{1}{s^2}-1\right)|w|^2\\&=s^2+\frac{1}{s^2}-2\ge0.\end{aligned}$$

(2)　(1) の結果を用いて

$$\begin{aligned}|r_1z_1-r_2z_2|\left|1-\frac{\bar{z}_1z_2}{r_1r_2}\right|&=\sqrt{r_1r_2}\left|\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}z_1-\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}z_2\right|\cdot\frac{1}{\sqrt{r_1r_2}}\left|\sqrt{r_1r_2}z_1-\frac{1}{\sqrt{r_1r_2}}z_2\right|\\&\ge|z_1-z_2|^2.\end{aligned}$$

第 2 章の問題

問題 2.1　(1)　中心 $1+i$, 半径 $\sqrt{2}$ の円.

(2)　中心 $-13/3$, 半径 $8/3$ の円.

(3)　空集合

(4)　直線 $x+y-1=0$.

問題 2.2　もし a と b が円 C に関して互いに鏡像であるとき，ある複素数 ξ ($|\xi|=1$) と $r>0$ が存在して

$$a=c+r\xi, \qquad b=c+\frac{R^2}{r}\xi$$

と書ける。円 C 上の点を $z=c+R\eta$ ($|\eta|=1$) と表すと

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-a}{z-b}\right| &= \left|\frac{(c+R\eta)-(c+r\xi)}{(c+R\eta)-(c+\frac{R^2}{r}\xi)}\right| = \left|\frac{R\eta-r\xi}{R\eta-\frac{R^2}{r}\xi}\right| \\ &= \frac{r}{R}\frac{|R\eta-r\xi|}{|r\eta-R\xi|} = \frac{r}{R}\frac{|R\eta-r\xi|}{|\overline{r\eta-R\xi}|} \\ &= \frac{r}{R}\frac{|R\eta-r\xi|}{|r\eta^{-1}-R\xi^{-1}|} = \frac{r}{R}\frac{|R\eta-r\xi|}{|r\xi-R\eta|} \\ &= \frac{r}{R}.\end{aligned}$$

したがって，円 C は a, b に関する一つのアポロニウス円である。

問題 2.3　(z_1, z_2, z_3 が同一直線にある場合も証明は同じなので)z_1, z_2, z_3 を通る円 K が存在する場合を考える。$(z_1,z_2,z_3,z_4)=1/(z_2,z_1,z_3,z_4)$ ゆえ，K 上反時計回りに z_1, z_2, z_3 が並んでいるとしてよい。このとき z_4 が K 上にあり，かつ z_1 と z_2 が K を分かつ 2 つの弧のうち z_3 がのっているのと同じ弧にあるための必要十分条件は $\angle z_2z_3z_1=\angle z_2z_4z_3$ であること, すなわち

$$\arg\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}=\arg\frac{z_2-z_4}{z_1-z_4} \Longleftrightarrow (z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{z_2-z_4}{z_1-z_2}\Big/\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}>0$$

となることである。一方 z_4 が K 上にあり，かつ z_1 と z_2 が K を分かつ 2 つの弧のうち z_3 をのせていない方の弧の上にあるための必要十分条件は $\angle z_2z_3z_1+\angle z_2z_4z_3=\pi$ であること, すなわち

$$\arg\frac{z_2-z_4}{z_1-z_4}=\pi+\arg\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3} \Longleftrightarrow (z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{z_2-z_4}{z_1-z_2}\Big/\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}<s0$$

となることである。

問題 2.4　(1), (2) をみたす z は $|z^2-1|^2=((2r^2-1)-|z|^2)^2$, したがって

$$(r^2-1)x^2+r^2y^2=r^2(r^2-1)$$

をみたす。

(1) $0<r<1$ のとき，$|z+1|+|z-1|=2r$ をみたす z は存在しない。$r=1$ のときは -1 と 1 を結ぶ線分。$r>1$ のときは楕円

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{r^2-1}}\right)^2=1.$$

(2) $1 < r$ のとき，$|z+1|-|z-1| = 2r$ をみたす z は存在しない。$r=1$ のときは実軸上の区間の和 $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. $0 < r < 1$ のときは双曲線

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2 = 1.$$

第 3 章の問題

問題 3.1　i と $-i$.

問題 3.2　(i) $a \in \mathbb{C}$ とすると，任意の $r > 0$ に対して $D(a,r) \subset \mathbb{C}$ ゆえ，$\mathbb{C}$ は開集合である。
(ii) $b \in U$ とする。$\rho = r - |b-a|$ とおけば，$\rho > 0$. $w \in D(b,\rho)$ とすると

$$|a-w| \le |a-b| + |b-w| < |a-b| + \rho = r$$

ゆえ，$D(b,\rho) \subset U$. よって U は開集合である。

問題 3.3　$S \neq \emptyset$ として考えてよい。
(i) $a \in I(S)$ とする。このとき，ある $r > 0$ が存在して，$D(a,r) \subset S$. $b \in D(a,r)$ とすると，問 (2) の (ii) より，ある $\rho > 0$ が存在して

$$D(b,\rho) \subset D(a,r) \subset I(S).$$

よって $b \in I(S)$ であり，$D(a,r) \subset I(S)$. よって $I(S)$ は開集合。

(ii) $S = \mathbb{C}$ ならば，$S \subset \bar{S}$ で $\bar{S} = \mathbb{C}$ なので $\bar{S}$ は閉集合である。S は $\mathbb{C}$ の真部分集合とする。$T = \mathbb{C} \setminus \bar{S}$ とおく。$a \in T$ ならば，ある $r > 0$ があって $D(a,r) \cap S = \emptyset$. このことから

$$T = I(\mathbb{C} \setminus S).$$

(i) より T は開集合だから，$\bar{S}$ は閉集合。

第 4 章の問題

問題 4.1　$S = (0,0,1)$ とおく。$z = x+iy$, $w = u+iv$ のとき，$Z = (x,y,0)$, $W = (u,v,0)$ とおく。$\triangle NSP(z)$ と $\triangle NZO$ は相似, $\triangle NSP(w)$ と $\triangle NWO$ は相似だから

$$d(N,P(z)) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} (= d(z,\infty)), \quad d(N,P(w)) = \frac{2}{\sqrt{1+|w|^2}}.$$

したがって $d(N,P(z))d(N,Z) = d(N,P(w))d(N,W) = 2$ であり，$\triangle NP(z)P(w)$ と $\triangle NWZ$ は相似になる。したがって

$$d_S(z,w) = d(P(z),P(w)) = d(Z,W)\frac{d(N,P(w))}{d(N,Z)} = \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}.$$

問題 4.2　(1) $z = \dfrac{aw+b}{cw+d}$ を解いて $w = f^{-1}(z) = \dfrac{dz-b}{-cz+a}$.
(2)

$$\begin{aligned}(g\circ f)(z) &= \frac{a_2\left(\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}\right)+b_2}{c_2\left(\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}\right)+d_2} = \frac{a_2(a_1z+b_1)+b_2(c_1z+d_1)}{c_2(a_1z+b_1)+d_2(c_1z+d_1)} \\ &= \frac{(a_2a_1+b_2c_1)z+(a_2b_1+b_2d_1)}{(c_2a_1+d_2c_1)z+(c_2b_1+d_2d_1)}.\end{aligned}$$

問題 4.3　写像の合成の表は次の通り。

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
S_1	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
S_2	S_2	S_1	S_5	S_6	S_3	S_4
S_3	S_3	S_4	S_1	S_2	S_6	S_5
S_4	S_4	S_3	S_6	S_5	S_1	S_2
S_5	S_5	S_6	S_2	S_1	S_4	S_3
S_6	S_6	S_5	S_4	S_3	S_2	S_1

問題 4.4　(1)

$$(\infty, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3},\ (z_1, z_2, \infty, z_4) = \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4},\ (z_1, z_2, z_3, \infty) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

(2)

$$\begin{aligned}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} &= \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} = (z_2, z_1, z_4, z_3) \\ &= \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} = (z_3, z_4, z_1, z_2) \\ &= \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1}\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = (z_4, z_3, z_2, z_1).\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}w &= (z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_2, z_1, z_4, z_3) = (z_3, z_4, z_1, z_2) = (z_4, z_3, z_2, z_1), \\ \frac{1}{w} &= (z_1, z_2, z_4, z_3) = (z_2, z_1, z_3, z_4) = (z_4, z_3, z_1, z_2) = (z_3, z_4, z_2, z_1), \\ 1 - w &= (z_1, z_3, z_2, z_4) = (z_3, z_1, z_4, z_2) = (z_2, z_4, z_1, z_3) = (z_4, z_2, z_3, z_1), \\ \frac{1}{1-w} &= (z_1, z_3, z_4, z_2) = (z_3, z_1, z_2, z_4) = (z_4, z_2, z_1, z_3) = (z_2, z_4, z_3, z_1), \\ \frac{w-1}{w} &= (z_1, z_4, z_2, z_3) = (z_4, z_1, z_3, z_2) = (z_2, z_3, z_1, z_4) = (z_3, z_2, z_4, z_1), \\ \frac{w}{w-1} &= (z_1, z_4, z_3, z_2) = (z_4, z_1, z_2, z_3) = (z_3, z_2, z_1, z_4) = (z_2, z_3, z_4, z_1).\end{aligned}$$

注：一次分数変換による複比の不変性 (命題 4.2) より，f を $f(z_2) = 1,\ f(z_3) = 0,\ f(z_4) = \infty$ をみたす一次分数変換, $w = f(z_1)$ とするとき,

$$w = (w, 1, 0, \infty) = (f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)).$$

$(w, 1, 0, \infty)$ を用いて計算するとよい。

問題 4.5

$$w = f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

を $A|z|^2 + Bz + B\bar{z} + C = 0$ に代入すると

$$A_1|w|^2 + B_1 + \bar{B}_1\bar{w} + C_1 = 0.$$

ここで

$$\begin{aligned} A_1 &= |d|^2A - \bar{c}dB - c\bar{d}\bar{B} + |c|^2C, \\ B_1 &= -\bar{b}dA + \bar{a}dB + \bar{b}c\bar{B} - \bar{a}cC, \\ C_1 &= |b|^2A - \bar{a}bB - a\bar{b}\bar{B} + |a|^2C. \end{aligned}$$

ここで A_1, C_1 は実数で $|B_1|^2 - A_1C_1 = |ad - bc|^2(|B|^2 - AC) > 0$.

第 5 章の問題

問題 5.1 (1)

$$\sinh z = \frac{e^{-i(iz)} - e^{i(iz)}}{2} = -i\sin(iz),\ \cosh z = \frac{e^{-i(iz)} + e^{i(iz)}}{2} = \cos(iz).$$

(2)

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} + \frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)\left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} - \frac{e^z - e^{-z}}{2}\right) = e^z e^{-z} = 1.$$

(3)

$$\begin{aligned} \sin(x + iy) &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}}{2i} \\ &= \frac{(e^{-y} - e^{y})\cos x + i(e^{-y} + e^{y})\sin x}{2i} = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y. \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \cos(x + iy) &= \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix}}{2} \\ &= \frac{(e^{-y} + e^{y})\cos x + i(e^{-y} - e^{y})\sin x}{2} = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y. \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} \sinh(x + iy) &= -i\sin(-y + ix) = -i(-\cosh x\sin y + i\sinh x\cos y) \\ &= \sinh x\cos y + i\cosh x\sin y. \end{aligned}$$

(6)

$$\cosh(x + iy) = \cos(-y + ix) = \cosh x\cos y + i\sinh x\sin y.$$

(7)

$$\begin{aligned} |\sin(x + iy)|^2 &= (\sin x\cosh y)^2 + (\cos x\sinh y)^2 = \sin^2 x(\sinh^2 y + 1) + \cos^2 x\sinh^2 y \\ &= \sin^x + \sinh^2 y. \end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned} |\cos(x + iy)|^2 &= (\cos x\cosh y)^2 + (\sin x\sinh y)^2 = \cos^2 x(\sinh^2 y + 1) + \sin^2 x\sinh^2 y \\ &= \cos^2 x + \sinh^2 y. \end{aligned}$$

問題 5.2　前問 (7) より

$$|\sin(x+iy)|^2 = 1-\cos^2 x+\sinh^2 y = \cosh^2 y-\cos^2 x \le \cosh^2 y.$$

よって

$$|\sin(x+iy)| \le \cosh y = \cosh|y| \le \frac{e^{|y|}+e^{-|y|}}{2} \le e^{|y|}.$$

また

$$|\sin(x+iy)|^2 \ge \sinh^2 y = \sinh^2|y|$$

だから，平均値の定理を用いて

$$|\sin(x+iy)| \ge \sinh|y| = (\cosh\theta|y|)|y| \ge |y|.$$

ここで θ は $0<\theta<1$ をみたすある実数である。

問題 5.3　$\zeta = e^{iz}$ とおくと

$$w = \tan z = \frac{\zeta-\zeta^{-1}}{i(\zeta+\zeta^{-1})} = \frac{\zeta^2-1}{i(\zeta^2+1)}.$$

よって

$$e^{2iz} = \zeta^2 = \frac{1+iw}{1-iw}$$

となり，

$$z = \arctan w = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iw}{1-iw}.$$

(注) 一次分数変換 $z_1 = f_1(w) = \dfrac{1+iw}{1-iw}$ は $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{i\eta : 1 \le |\eta|\}$ を $\Omega_1 = \mathbb{C}\setminus\{x : x \le 0\}$ に写す。$z = f_2(z_1) = \dfrac{1}{2i}\log z_1$ は Ω_2 を $\Omega_3 = \left\{z : -\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Re}\, z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$ に写す。$\arctan w = f_2(f_1(w))$.

問題 5.4　(1) $\zeta = e^{iz}$ とおくと

$$\frac{\zeta+\zeta^{-1}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \zeta^2 - 2\sqrt{3}\zeta + 1 = 0.$$

よって $e^{iz} = \sqrt{3}\pm\sqrt{2}$ であるから

$$z = i\log(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + 2n\pi, \quad z = i\log(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + 2n\pi \qquad (n \text{ は整数}).$$

(2) $\zeta = e^{iz}$ とおくと

$$\frac{\zeta-\zeta^{-1}}{i(\zeta+\zeta^{-1})} = 2i \Rightarrow e^{2iz} = \zeta^2 = -\frac{1}{3}.$$

よって

$$z = \frac{i}{2}\log 3 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \qquad (n \text{ は整数}).$$

第 6 章の問題

問題 6.1

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y),$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{(-x^2+y^2)+2xyi}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{\bar{z}^2}{|z|^4}=-\frac{1}{z^2}.$$

問題 6.2

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)&=\frac{x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{1}{x}=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y),\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)&=\frac{y}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{1}{1+(y/x)^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y),\end{aligned}$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{x-iy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{z}.$$

第 7 章の問題

問題 7.1　$z\in\mathbb{H}$ のとき

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\varphi(z)&=\frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d}-\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\right)\\ &=\frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2(2i)}=\frac{(ad-bc)\operatorname{Im}z}{|cz+d|^2}>0.\end{aligned}$$

より φ は $\mathbb{H}$ を $\mathbb{H}$ に写す。$\varphi(z)$ の逆写像

$$\varphi^{-1}(z)=\frac{dz-b}{-cz+a},\quad (da-(-b)(-c)>0)$$

も $\mathbb{H}$ を $\mathbb{H}$ に写すので，φ は $\mathbb{H}$ からそれ自身への同相写像である。$z\in\mathbb{H}$ のとき

$$\varphi'(z)=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0$$

ゆえ，φ は $\mathbb{H}$ からそれ自身への等角写像である。

第 8 章の問題

問題 8.1　(1)

$$\begin{aligned}\int_C xy\ dx&=\int_0^1 x(t)y(t)\cdot x'(t)dt=\int_0^1(1-t)\sqrt{2t-t^2}\cdot(-1)dt\\ &=\left[-\frac{1}{3}(2t-t^2)\right]_0^1=-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

(2)

$$\int_C xy\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\theta)y(\theta)\cdot x'(\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\cdot(-\sin\theta)d\theta$$
$$= \left[-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}.$$

問題 8.2　(1) C を $x(\theta)=\cos\theta$, $y(\theta)=\sin\theta$ $(0\le\theta\le\pi/2)$ で表示すると

$$\int_C ydx + 2xdy = \int_0^{\pi/2}(\sin\theta(-\sin\theta)+2\cos\theta\cos\theta)d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2}\frac{1+3\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

(2) C を $x(\theta)=\cos\theta$, $y(\theta)=\sin\theta$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ で表示すると

$$\int_C x^2ydx - xy^2dy = \int_0^{2\pi}(\cos^2\theta\sin\theta(-\sin\theta)-\cos\theta\sin^2\theta\cos\theta)d\theta$$
$$= -\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 2\theta}{2}d\theta = -\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\theta}{4}d\theta = -\frac{\pi}{2}.$$

問題 8.3　D は C の内部とする。

(1)

$$\int_C ydx + 2xdy = \iint_D dxdy = D\text{ の面積} = \frac{\pi}{4}.$$

(2)

$$\int_C x^2ydx - xy^2dy = \iint_D(-x^2-y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1(-r^2)rdr\right\}d\theta = -\frac{\pi}{2}.$$

問題 8.4　C を $x(\theta)=a\cos\theta$, $y(\theta)=b\sin\theta$ $(0\le 0\le 2\pi)$ で表示すると

$$\frac{1}{2}\int_C -ydx + xdy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}((-b\sin\theta)(-a\sin\theta)+a\cos\theta(b\cos\theta))d\theta = ab\pi.$$

グリーンの定理より，これは C の内部の面積である。

第 9 章の問題

問題 9.1　(1)

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}f) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f.$$

(2)

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}f) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 0.$$

問題 9.2　(9.8) は (9.7) から直ちにしたがう。Green の定理により

$$\begin{aligned}\int_\Gamma g\frac{\partial f}{\partial n}ds &= \int_\Gamma\left(-g\frac{\partial f}{\partial y}dx + g\frac{\partial f}{\partial x}dy\right)\\&= \iint_D\left[-\frac{\partial}{\partial y}\left(-g\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]dxdy\\&= \iint_D\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right)dxdy + \iint_D g\Delta f\ dxdy.\end{aligned}$$

問題 9.3

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \int_0^1\left\{u(tx,ty)+tx\frac{\partial u}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial v}{\partial x}(tx,ty)\right\}dt.$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(tu(tx,ty)) &= u(tx,ty)+tx\frac{\partial u}{\partial x}(tx,ty)+ty\frac{\partial u}{\partial y}(tx,ty)\\&= u(tx,ty)+tx\frac{\partial u}{\partial x}(tx,ty)+ty\frac{\partial v}{\partial x}(tx,ty)\end{aligned}$$

だから

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \int_0^1\frac{d}{dt}(tu(tx,ty))\ dt = u(x,y).$$

同様にして $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = v(x,y)$ が示せる。

第 11 章の問題

問題 11.1　$\mathrm{Re}\,f(z)$ が D の内点 z_0 で最大値を取ったとする。$F(z) = e^{f(z)}$ は D 上の正則関数で $|F(z)| = e^{\mathrm{Re}\,f(z)}$ は z_0 で最大値を取る。したがって定理 11.3 より $F(z)$ は定数 $e^{f(z_0)}$ である。したがって $z\in D$ に対してある整数 $n(z)$ があって $f(z) = f(z_0)+2n(z)\pi i$. 領域 D 上で $f(z)$ は連続で $n(z_0) = 0$ だから $n(z)$ は定数 0 である。

第 12 章の問題

問題 12.1　(1)

$$\begin{aligned}x^5-1 &= (x-1)(x-\zeta)(x-\bar\zeta)(x-\zeta)(x-\bar\zeta)(x-\bar\zeta)(x-\zeta^2)(x-\bar\zeta^2)\\&= (x-1)(x^2-2\cos\frac{2\pi}{5}x+1)(x^2-2\cos\frac{4\pi}{5}x+1).\end{aligned}$$

$a = \cos\dfrac{2\pi}{5},\quad b = \cos\dfrac{4\pi}{5}$ とおくと,

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = x^5-1 = (x-1)(x^2-2ax+1)(x^2-2bx+1)$$

より

$$x^4+x^3+x^2+x+1 = x^4-2(a+b)x^3+2(1+2ab)x^2-2(a+b)x+1.$$

係数を比較して

$$a+b=-\frac{1}{2},\ ab=-\frac{1}{4}.$$

(2) a,b は

$$x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=0$$

の解。$a>0,\, b<0$ より

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4},\quad \cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

(3) $e^{\frac{\pi}{5}i}=-e^{-\frac{4\pi}{5}i}=-\bar{\zeta}^2$. したがって

$$\cos\frac{\pi}{5}=-\mathrm{Re}\,(\bar{\zeta}^2)=-\mathrm{Re}\,(\zeta^2)=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

同様に

$$\cos\frac{3\pi}{5}=-\mathrm{Re}\,(\bar{\zeta})=-\mathrm{Re}\,(\zeta)=\frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

(4)

$$1,\quad \frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\quad -\frac{\sqrt{5}+1}{4}\pm i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

問題 12.2　$x=y-2$ とおくと $y^3-9y+12=0$. $p=-9,\, q=12$ とおくと

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}=-3,\quad v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}=-9.$$

ここで

$$u=-3^{\frac{1}{3}},\quad v=-3^{\frac{2}{3}}$$

とおくと $y^3-9y+12=0$ の解は

$$-3^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{2}{3}},\quad -3^{\frac{1}{3}}\omega-3^{\frac{2}{3}}\omega^2,\quad -3^{\frac{1}{3}}\omega^2-3^{\frac{2}{3}}\omega.$$

ただし，$\omega=(-1+\sqrt{3}i)/2$. よって求める解は

$$-2-3^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{2}{3}},\quad -2-3^{\frac{1}{3}}\omega-3^{\frac{2}{3}}\omega^2,\quad -2-3^{\frac{1}{3}}\omega^2-3^{\frac{2}{3}}\omega.$$

第 13 章の問題

問題 13.1　(1) 任意の $\epsilon>0$ に対してある N が存在して $n>N$ ならば

$$\left|\sum_{k=0}^{n}a_k-a\right|<\frac{\epsilon}{|\alpha|+|\beta|+1},\quad \left|\sum_{k=0}^{n}b_k-b\right|<\frac{\epsilon}{|\alpha|+|\beta|+1}.$$

よって，このとき

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n}(\alpha a_k+\beta b_k)-(\alpha a+\beta b)\right|&\le|\alpha|\left|\sum_{k=1}^{n}a_k-a\right|+|\beta|\left|\sum_{k=1}^{n}b_k-b\right|\\&<\frac{|\alpha|+|\beta|}{|\alpha|+|\beta|+1}\epsilon<\epsilon.\end{aligned}$$

だから $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n + \beta b_n = \alpha a + \beta b.$

(2)

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$$

とおくと

$$\sum_{m=0}^{n} |c_m| \leq \sum_{m=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{m} |a_k||b_{m-k}| \right) \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| \right) \left(\sum_{k=0}^{n} |b_k| \right) \leq AB.$$

したがって，$\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} |c_m|$ は上に有界な正項級数だから，収束する。

$$\sum_{k=0}^{2n} c_k - \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{n} b_k \right) = \sum a_l b_m$$

は，$l + m \leq 2n$, $l > n$ または $m > n$ をみたす l, m についての和

$$\begin{aligned} &a_0(b_{n+1} + \cdots + b_{2n}) + a_1(b_{n+1} + \cdots + b_{2n-1}) + \cdots + a_{n-1}b_{n+1} \\ &+ b_0(a_{n+1} + \cdots + a_{2n}) + b_1(a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1}) + \cdots + b_{n-1}a_{n+1} \end{aligned}$$

であるから

$$\left| \sum_{k=0}^{2n} c_k - \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{n} b_k \right) \right| \leq A \left(\sum_{k=n+1}^{2n} |b_k| \right) + B \left(\sum_{k=n+1}^{2n} |a_k| \right).$$

$n \to \infty$ として $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n = ab.$

問題 13.2　上問より

$$\begin{aligned} E(z)E(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} z^k w^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = E(z+w). \end{aligned}$$

問題 13.3　$b = \displaystyle\limsup_{n\to\infty} b_n$ とおく。$b \geq 0$ である。ϵ を任意の正数とする。$\epsilon_1 = \max\left\{1, \dfrac{\epsilon}{a+b+1}\right\}$ とおくと，ある N があって $n > N$ ならば

$$|a - a_n| < \epsilon_1, \qquad b_n < b + \epsilon_1.$$

このとき

$$a_n b_n < ab + (a + b + \epsilon_1)\epsilon_1 \leq ab + (a+b+1)\frac{\epsilon}{a+b+1} = ab + \epsilon.$$

よって $\limsup_{n\to\infty} a_nb_n \le ab$. 一方，ある $n > N$ があって $b - \epsilon_1 < b_n$. このとき

$$a_nb_n > (a-\epsilon_1)(b-\epsilon_1) = ab - (a+b-\epsilon_1)\epsilon_1 \ge ab - \epsilon.$$

したがって $\limsup_{n\to\infty} a_nb_n \ge ab$ となり $\limsup_{n\to\infty} a_nb_n = ab$.

問題 13.4　(1) 帰納法で示す。$n = 1$ のとき，左辺 $= 1$,

$$右辺 = \frac{1-2z+z^2}{(1-z)^2} = 1$$

である。今

$$1 + 2z + 3z^2 + \cdots + +nz^{n-1} = \frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2} \tag{13.5}$$

が成り立つとすると，$1 + 2z + 3z^2 + \cdots + +nz^{n-1} + (n+1)z^n$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2} + \frac{(n+1)(1-2z+z^2)z^n}{(1-z)^2} \\
&= \frac{1 + [-(n+1)+(n+1)]z^n + [n-2(n+1)]z^{n+1} + (n+1)z^{n+2}}{(1-z)^2} \\
&= \frac{1-(n+2)z^{n+1} + (n+1)z^{n+2}}{(1-z)^2}.
\end{aligned}$$

よって，すべての n に対して (13.5) が成り立つ。
(2) $r = 1 + h > 1$ のとき

$$0 < \frac{n}{r^n} < \frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}h^2} = \frac{2}{(n+1)h^2}$$

より，$\lim_{n\to\infty} nr^{-n} = 0$. よって $|z| < 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)z^n = \lim_{n\to\infty} nz^{n+1} = 0.$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

問題 13.5　　収束半径を ρ とおく。

(1)　$a_n = \dfrac{1}{2^n n^2}$ とおくと

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)^2}{2^n n^2} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = 2.$$

(2)　$a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$ とおくと

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

(3)　まず整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{4^n}$ の収束半径 r を求めると

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4.$$

整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{4^n}$ は上の整級数に $w = z^2$ を代入したものだから $\rho = \sqrt{r} = 2.$

(4)　$a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ とおくと

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

第 14 章の問題

問題 14.1

$$|e^z - 1| = \left| z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \right| \le |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \cdots + \frac{|z|^n}{n!} + \cdots$$
$$= e^{|z|} - 1.$$

問題 14.2

$$h(z) = \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}$$

とおく。$|a| < 1$ のとき，$|1 - \bar{a}z|^2 - |z - a|^2 = (1 - |a|^2)(1 - |z|^2) > 0$ だから，h は単位円板 $\mathbb{D}$ を $\mathbb{D}$ の中に写す。h の逆写像

$$h^{-1}(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

もその形より $\mathbb{D}$ を $\mathbb{D}$ の中に写すので，h は $\mathbb{D}$ からそれ自身への等角写像である。すると $f(z) = \varphi(h(z))$ は $\mathbb{D}$ からそれ自身への等角写像で $f(0) = 0$. よって Schwarz の補題より $z \in \mathbb{D}$ に対して $|f(z)| \le |z|$. 一方 f の逆写像 f^{-1} も $\mathbb{D}$ からそれ自身への等角写像で $f^{-1}(0) = 0$ をみたすから，$|f(z)| \ge |z|$. よって $|f(z)| = |z|$ となり，ある実数 θ があって $f(z) = e^{i\theta}z$. よって

$$\varphi(z) = e^{i\theta} h^{-1}(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

問題 14.3

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

の収束半径は 1 で収束円内で $(1 - z)^{-1}$ を表す。

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \ \ (|z| < 1)$$

の両辺を k 回微分すれば良い。

第 15 章の問題

問題 15.1 (1) $f(z) = \dfrac{z-2}{(z^2+1)^2}$ の C 内の特異点は $z = i$ のみで，これは 2 位の極である。よって

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,i) &= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left((z-i)^2 f(z)\right) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z-2}{(z+i)^2}\right)\\ &= \lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^2} - \frac{2(z-2)}{(z+i)^3}\right) = \frac{1}{(2i)^2} - \frac{2(i-2)}{(2i)^3}\\ &= \frac{i}{2}.\end{aligned}$$

したがって

$$\int_C \frac{z-2}{(z^2+1)^2}\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f,i) = -\pi.$$

(2) 例 15.3 を参照する。$f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$ の C 内の特異点は

$$\zeta_1 = e^{\pi i/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \zeta_2 = e^{\pi 3i/4} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

の 2 つで，ともに 1 位の極である。

$$\mathrm{Res}(f,\zeta_1) = -\frac{\zeta_1}{4} = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}, \quad \mathrm{Res}(f,\zeta_2) = -\frac{\zeta_2}{4} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}.$$

だから

$$\int_C \frac{dz}{z^4+1}\, dz = 2\pi i\mathrm{Res}(f,\zeta_1) + 2\pi i\mathrm{Res}(f,\zeta_2) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(3) $f(z) = z^2 e^{1/z}$ の C 内の特異点は $z = 0$ のみで，これは

$$\begin{aligned}z^2 e^{1/z} &= z^2\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + \cdots\right)\\ &= z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6z} + \frac{1}{24}\frac{1}{z^2} + \cdots\end{aligned}$$

から，真性特異点で，$\mathrm{Res}(f,0) = 1/6$. したがって

$$\int_C z^2 e^{1/z}\, dz = \frac{\pi i}{3}.$$

問題 15.2 $g(z) = c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \cdots$, $G(z) = c_2 + c_3(z-a) + \cdots$ とおく。このとき

$$\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}\frac{d}{dz}\left(\frac{h(z)}{G(z)}\right) = \frac{h'(a)G(a) - h(a)G'(a)}{G'(a)^2}.$$

これに

$$G(a) = c_2 = \frac{g''(a)}{2}, \quad G'(a) = c_3 = \frac{g'''(a)}{6}$$

を代入して

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{6h'(a)g''(a) - 2h(a)g''(a)}{6g''(a)^2}.$$

問題 15.3　(1) R を十分大きく取って C を円 $|z| = R$ とするとき，C の内部に点 a_1, a_2,..., a_m が含まれるようにする。$|z| > R$ における $f(z)$ のローラン展開を

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

とすると，留数定理により

$$\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(f, a_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\ dz = c_{-1} = -\mathrm{Res}(f, \infty).$$

(上の積分で C は正 (反時計回り) の向きであることに注意)
(2) $p = \deg P(z)$, $q = \deg Q(z)$ とすると R を十分大きく取るとき，$|z| > R$ で

$$f(z) = \frac{c_{p-q}}{z^{q-p}} + \frac{c_{p-q-1}}{z^{q-p+1}} + \frac{c_{p-q-2}}{z^{q-p+2}} + \cdots$$

と展開される。$q - p \geq 2$ より $\mathrm{Res}(f, \infty) = 0$. したがって問 (1) より $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(f, b_k) = 0$.

第 16 章の問題

問題 16.1　C は単位円周とする。
(1)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2\theta} &= \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \frac{1-\cos 2\theta}{2}} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3 - \cos\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (\varphi = 2\theta)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_C \frac{1}{1 - 2a\frac{z+z^{-1}}{2} + a^2} \frac{z^n + z^{-n}}{2} \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{-1}{4ai} \int_C \frac{z^n + z^{-n}}{(z - a^{-1})(z - a)} dz.\end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{z^n + z^{-n}}{(z - a^{-1})(z - a)} = \frac{z^n + z^{-n}}{(a - a^{-1})} \left(\frac{1}{z - a} - \frac{1}{z - a^{-1}} \right)$$

とおく。$|z| < |a|$ のとき，

$$f(z) = (z^n + z^{-n}) \left(1 + \frac{a^2 - a^{-2}}{a - a^{-1}} z + \cdots + \frac{a^n - a^{-n}}{a - a^{-1}} z^{n-1} + \cdots \right).$$

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{a^n + a^{-n}}{a - a^{-1}},\ \mathrm{Res}(f, 0) = \frac{a^n - a^{-n}}{a - a^{-1}}.$$

よって

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta = \frac{-1}{4ai} \times 2\pi i(\mathrm{Res}(f,a)+\mathrm{Res}(f,0)) = \frac{a^n\pi}{1-a^2}.$$

上の等式は $a=0$ のときも正しい。

(3)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{1-2a\cos 2\theta+a^2}d\theta = \int_C \frac{\left(\frac{z^3+z^{-3}}{2}\right)^2}{1-a(z^2+z^{-2})+a^2}\frac{dz}{iz} = \int_C f(z)\ dz.$$

ここで

$$f(z) = \frac{i}{4}\frac{(z^6+1)^2}{z^5(az^2-1)(z^2-a)}.$$

$$\mathrm{Res}(f,\sqrt{a}) = \mathrm{Res}(f,-\sqrt{a}) = \frac{(a^3+1)^2 i}{8a^3(a^2-1)} = \frac{(a+1)(a^2-a+1)^2 i}{8a^3(a-1)}.$$

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{i(z^6+1)^2}{4(a^2-1)z^5}\left(\frac{1}{z^2-a}-\frac{1}{z^2-a^{-1}}\right) = \frac{i(z^6+1)^2}{4(a^2-1)z^5}\left(\frac{a}{1-az^2}-\frac{1}{a(1-a^{-1}z^2)}\right) \\
&= \frac{i(z^6+1)^2}{4(a^2-1)z^5}\sum_{n=0}^{\infty}(a^{n+1}-a^{-(n+1)})z^{2n} \\
&= \frac{i(z^{12}+2z^6+1)}{4(a^2-1)z^5}\left((a-a^{-1})+(a^2-a^{-2})z^2+(a^3-a^{-3})z^4+\cdots\right)
\end{aligned}$$

より

$$\mathrm{Res}(f,0) = \frac{i(a^2-a+1)(a^3-1)}{4a^3(a-1)}.$$

したがって

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\ dz &= 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,\sqrt{a})+\mathrm{Res}(f,-\sqrt{a})+\mathrm{Res}(f,0)\right) \\
&= 2\pi i\left(\frac{(a+1)(a^2-a+1)^2 i}{4a^3(a-1)}+\frac{i(a^2-a+1)(a^3-1)}{4a^3(a-1)}\right) \\
&= \frac{(1-a+a^2)\pi}{1-a}.
\end{aligned}$$

(4)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin n\theta}{a-b\sin\theta}d\theta = \int_C \frac{\frac{1}{2i}\left(z^n-\frac{1}{z^n}\right)}{\left(a-b\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)iz}dz = \int_C f(z)\ dz$$

ここで

$$f(z) = \frac{i}{b}\left(z^n-\frac{1}{z^n}\right)\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}, \qquad \alpha = \frac{i(a-\sqrt{a^2-b^2})}{b}, \quad \beta = \frac{i(a+\sqrt{a^2-b^2})}{b}.$$

$$\mathrm{Res}(f,\alpha) = \frac{i}{b}\left(\alpha^n-\frac{1}{\alpha^n}\right)\frac{1}{\alpha-\beta} = \frac{i}{b}\frac{\alpha^n-(-\beta)^n}{\alpha-\beta}.$$

$|z|$ が十分小さいとき

$$f(z) = \frac{i}{b(\alpha-\beta)}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)\left(\frac{1}{\beta-z} - \frac{1}{\alpha-z}\right) = \frac{i}{b(\alpha-\beta)}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta^{k+1}} - \frac{1}{\alpha^{k+1}}\right)z^k$$

だから

$$\mathrm{Res}(f,0) = -\frac{i}{b(\alpha-\beta)}\left(\frac{1}{\beta^n} - \frac{1}{\alpha^n}\right) = -\frac{(-1)^n i}{b(\alpha-\beta)}(\alpha^n - \beta^n).$$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\sin n\theta}{a - b\sin\theta}d\theta &= 2\pi i(\mathrm{Res}(f,\alpha) + \mathrm{Res}(f,0)) \\ &= 2\pi i \times \frac{i}{b(\alpha-\beta)}(\alpha^n - (-1)^n\beta^n - (-1)^n(\alpha^n - \beta^n)).\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin n\theta}{a - b\sin\theta}d\theta = \begin{cases} \dfrac{2(-1)^k\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)^{2k+1} & (n = 2k+1) \\ 0 & (n = 2k) \end{cases}$$

(5)

$$\int_0^{2\pi} \cos e^{i\theta}\ d\theta = \int_C \frac{\cos z}{iz}dz = 2\pi i\frac{\cos 0}{i} = 2\pi.$$

(6), (7)

$$\int_0^{2\pi i} e^{\cos\theta}e^{i(n\theta - \sin\theta)}d\theta = \int_C z^n e^{1/z}\frac{dz}{iz}.$$

ここで

$$f(z) = \frac{z^{n-1}}{i}e^{1/z} = \frac{z^{n-1}}{i}\left(1 + \frac{1}{z} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + \cdots\right)$$

とおくと $\mathrm{Res}(f,0) = 1/(in!)$. よって

$$\int_0^{2\pi i} e^{\cos\theta}e^{i(n\theta - \sin\theta)}d\theta = \frac{2\pi}{n!}.$$

両辺の実部と虚部を比較して

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta - \sin\theta)d\theta = \frac{2\pi}{n!}, \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(n\theta - \sin\theta)d\theta = 0.$$

(8)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a + b\cos\theta}d\theta = \int_C f(z)\ dz.$$

ただし,

$$f(z) = -\frac{1}{2bi}\left(z - \frac{1}{z}\right)\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}, \quad \alpha = \frac{-a + \sqrt{a^2-b^2}}{b},\ \beta = -\frac{a + \sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

よって

$$\mathrm{Res}(f,\alpha) = -\frac{1}{2bi}(\alpha-\beta)^2\frac{1}{\alpha-\beta} = -\frac{\alpha-\beta}{2bi} \quad (\because \alpha\beta = 1).$$

$|z|<1$ が十分小さいとき

$$f(z) = -\frac{1}{2bi}\left(z^2 - 2 + \frac{1}{z^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta^{n+1}} - -\frac{1}{\alpha^{n+1}}\right)z^n$$

だから，

$$\mathrm{Res}(f,0) = -\frac{1}{2bi(\alpha-\beta)}\left(\frac{1}{\beta^2} - -\frac{1}{\alpha^2}\right) = -\frac{\alpha+\beta)}{2bi}.$$

よって

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta = 2\pi i\left(-\frac{\alpha-\beta}{2bi} - \frac{\alpha+\beta)}{2bi}\right) = \frac{2\pi(a-\sqrt{a^2-b^2})}{b^2}.$$

問題 16.2

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos\theta+c\sin\theta)^n} = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+\sqrt{b^2+c^2}\sin\theta)^n}$$

だから，

$$I_n = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\sin\theta)^n}$$

を求められるとよい。以下，α, β は例 16.1 と同じとする。このとき

$$f(z) = \frac{1}{\left(a+b\frac{z-1/z}{2i}\right)^n}\frac{1}{iz} = \frac{2(2i)^{n-1}z^{n-1}}{b^n(z-\alpha)^n(z-\beta)^n}$$

とおく。$f(z)$ の単位円板内の極は α のみで，それは n 位の極である。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,\alpha) &= \lim_{z\to\alpha}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{2(2i)^{n-1}z^{n-1}}{b^n(z-\beta)^n}\right) \\
&= \lim_{z\to\alpha}\frac{2(2i)^{n-1}}{b^n(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\left(\frac{d^k}{dz^k}z^{n-1}\right)\left(\frac{d^{n-1-k}}{dz^{n-1-k}}\frac{1}{(z-\beta)^n}\right) \\
&= \lim_{z\to\alpha}\frac{2(2i)^{n-1}}{b^n(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\left(\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}z^{n-1-k}\right)\times \\
&\qquad\qquad\left(\frac{(-1)^{n-1-k}(2n-k-2)!}{(n-1)!}\frac{1}{(z-\beta)^{2n-1-k}}\right) \\
&= \frac{2(2i)^{n-1}}{b^n(\alpha-\beta)^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-1-k}(2n-k-2)!}{k!\{(n-1-k)!\}^2}\left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\right)^{n-1-k} \\
&= \frac{2(2i)^{n-1}}{b^n(\alpha-\beta)^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k(n-1+k)!}{(n-1-k)!\{k!\}^2}\left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\right)^k \\
&= \frac{2(2i)^{n-1}}{b^n(\alpha-\beta)^n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\binom{n-1+k}{k}\left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\right)^k \\
&= \frac{2}{i(a^2-b^2)^{n/2}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\binom{n-1+k}{k}\left(\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{2\sqrt{a^2-b^2}}\right)^k,
\end{aligned}$$

よって I_n の値は

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\sin\theta)^n}$$
$$= \frac{2\pi}{(a^2-b^2)^{(2n-1)/2}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \binom{n-1+k}{k} \left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2} \right)^k \left(\sqrt{a^2-b^2} \right)^{n-1-k}.$$

n	I_n	n	I_n
1	$\dfrac{2\pi}{(a^2-b^2)^{1/2}}$	4	$\dfrac{a(2a^2+3b^2)\pi}{(a^2-b^2)^{7/2}}$
2	$\dfrac{2a\pi}{(a^2-b^2)^{3/2}}$	5	$\dfrac{(8a^4+24a^2b^2+3b^4)\pi}{(a^2-b^2)^{9/2}}$
3	$\dfrac{(2a^2+b^2)\pi}{(a^2-b^2)^{5/2}}$	6	$\dfrac{a(8a^4+40a^2b^2+15b^4)\pi}{(a^2-b^2)^{11/2}}$

$a > \sqrt{b^2+c^2}$ のとき，

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta+c\sin\theta)^n}$$
$$= \frac{2\pi}{(a^2-b^2-c^2)^{(2n-1)/2}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \binom{n-1+k}{k} \left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2-c^2}}{2} \right)^k \left(\sqrt{a^2-b^2-c^2} \right)^{n-1-k}.$$

問題 16.3　(1) $|z|<1$ のとき

$$\frac{\log(1-z)}{z} = -1 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{3} - \cdots$$

だから $|z| \le r$ において $\log(1-z)/z$ は正則。よって C を円 $|z|=r$ とすると

$$0 = \int_C \frac{\log(1-z)}{iz} dz = \int_0^{2\pi} \log(1-re^{i\theta}) d\theta.$$

両辺の実部を比較して

$$\int_0^{\pi} \log(1-2r\cos\theta+r^2) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \log(1-2r\cos\theta+r^2) d\theta = 0.$$

(2) $r>1$ のとき，(1) より

$$\int_0^{\pi} \log(1-2r\cos\theta+r^2) d\theta = \int_0^{\pi} 2\log r d\theta + \int_0^{\pi} \log\left(1-\frac{2}{r}\cos\theta+\frac{1}{r^2}\right) d\theta$$
$$= 2\pi\log r.$$

第 17 章の問題

問題 17.1　(1)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

とおく。$f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$ の上半平面にある極は i のみで，それは 2 位の極。

$$\mathrm{Res}(f,i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}((z-i)^2f(z))=\frac{1}{4i}.$$

したがって，$I=2\pi i\mathrm{Res}(f,i)=\pi/2.$

(2)

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx=2\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$$

とおく。$f(z)=\dfrac{z^2}{(1+z^2)^2}$ の上半平面にある極は i のみで，それは 2 位の極。

$$\mathrm{Res}(f,i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}((z-i)^2f(z))=\frac{1}{4i}.$$

したがって，$J=2\pi i\mathrm{Res}(f,i)=\pi/2.$ よって

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

(3)

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

とおく。$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$ の上半平面にある極は ai と bi でともに 1 位の極。

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,ai)&=\lim_{z\to ai}\frac{z-ai}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}=\frac{1}{2ai(-a^2+b^2)}\\ \mathrm{Res}(f,bi)&=\lim_{z\to bi}\frac{z-bi}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}=\frac{1}{2bi(a^2-b^2)}.\end{aligned}$$

したがって，

$$I=2\pi i\left(\frac{1}{2ai(-a^2+b^2)}+\frac{1}{2bi(a^2-b^2)}\right)=\frac{\pi}{ab(a+b)}$$

(4)

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+ax+b}$$

とおく。

$$\alpha=\frac{-a+\sqrt{4b-a^2}i}{2},\quad \beta=\frac{-a-\sqrt{4b-a^2}i}{2}$$

とおくと $f(z)=\dfrac{1}{z^2+az+b}$ の上半平面にある極は α で 1 位の極。

$$\mathrm{Res}(f,\alpha)=\lim_{z\to\alpha}\frac{z-\alpha}{(z-\alpha)(z-\beta)}=\frac{1}{i\sqrt{4b-a^2}}.$$

したがって，

$$I=\frac{2\pi}{\sqrt{4b-a^2}}.$$

問題 17.2　(1)

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^2}dx$$

とおく。$f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}$ の上半平面にある極は i のみで，それは 2 位の極。

$$\mathrm{Res}(f,i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}((z-i)^2f(z))=\frac{e^{-1}}{2i}.$$

したがって，$I=\mathrm{Re}\ (2\pi i\mathrm{Res}(f,i))=\dfrac{\pi}{e}$, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^2}dx=\frac{\pi}{2e}$.

(2), (3) $f(z)=\dfrac{e^{2iaz}}{z^2+z+1}$ の上半平面にある極は $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のみで，それは 1 位の極。

$$\mathrm{Res}(f,\omega)=\lim_{z\to\omega}(z-\omega)\frac{e^{2iaz}}{(z-\omega)(z-\bar{\omega})}=\frac{e^{-ai-\sqrt{3}a}}{\sqrt{3}i}.$$

よって

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2iax}}{x^2+x+1}dx=\frac{2\pi e^{-\sqrt{3}a}}{\sqrt{3}}(\cos a-i\sin a).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2ax}{x^2+x+1}dx=\frac{2\pi e^{-\sqrt{3}a}}{\sqrt{3}}\cos a,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2ax}{x^2+x+1}dx=-\frac{2\pi e^{-\sqrt{3}a}}{\sqrt{3}}\sin a.$$

第 18 章の問題

問題 18.1

$$\begin{aligned}\sin z&=\frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i}=\frac{e^{ix-y}-e^{-ix+y)}}{2i}\\&=\frac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x+\frac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x\\&=\cosh y\sin x+i\sinh y\cos x.\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}|\sin z|^2&=(\cosh y\sin x)^2+(\sinh y\cos x)^2\\&=(\sinh^2 y+1)\sin^2 x+\sinh^2 y\cos^2 x\\&\geq\sinh^2 y.\end{aligned}$$

問題 18.2　(1) $f(z)=\log z$ を正の実軸上で実対数関数 $\log x$ と一致する分枝とする。このとき，$x>0$ ならば，$f(-x)=\log(e^{i\pi}x)=(-1)+\log x$ である。例 18.1 の図のような積分路 $C=C_1+C_2+C_3+C_4$ を考える。C の内部における $f(z)^n/(z^2+a^2)$ の極は ai のみで，これは一位の極。

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f(z)^n}{x^2+a^2},ai\right)=\frac{f(ai)^n}{2ai}=\frac{1}{2ai}\left(\log a+\frac{\pi}{2i}\right)^n.$$

したがって

$$\int_C\frac{f(z)^n}{x^2+a^2}\ dz=\frac{\pi}{a}\left(\log a+\frac{\pi i}{2}\right)^n. \tag{18.6}$$

ここで

$$\left|\int_{C_4} \frac{f(z)^n}{z^2+a^2}\ dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{(\log Re^{i\theta})^n}{(Re^{i\theta})^2+a^2} iRe^{i\theta} d\theta\right| \le \int_0^\pi \frac{(\log R+\pi)^n R}{R^2-a^2} d\theta$$
$$= \pi \frac{(\log R+\pi)^n}{R} \frac{R^2}{R^2-a^2} \to 0 \quad (R\to\infty),$$

$$\left|\int_{C_2} \frac{f(z)^n}{z^2+a^2}\ dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{(\log \epsilon e^{i\theta})^n}{(\epsilon e^{i\theta})^2+a^2} i\epsilon e^{i\theta} d\theta\right| \le \int_0^\pi \frac{(\log \epsilon+\pi)^n \epsilon}{a^2-\epsilon^2} d\theta$$
$$= \frac{(\log\epsilon+\pi)^n \epsilon\pi}{a^2-\epsilon^2} \to 0 \quad (\epsilon\to 0),$$

$$\int_{C_1} \frac{f(z)^n}{z^2+a^2}\ dz = \int_\epsilon^R \frac{(\log(-x))^n}{x^2+a^2}\ dx = \int_\epsilon^R \frac{(\log x+\pi i)^n}{x^2+a^2}\ dx.$$

したがって，(18.6) において $R\to\infty$, $\epsilon\to 0$ とすると，

$$2\int_0^\infty \frac{(\log x)^n}{x^2+a^2} dx + \sum_{k=0}^{n-1} (i\pi)^{n-k} \binom{n}{k} \int_0^\infty \frac{(\log x)^k}{x^2+a^2}\ dx = \frac{\pi}{a}\left(\log a + \frac{\pi i}{2}\right)^n.$$

これを整理して

$$I_n = \frac{\pi}{2a}(\log a)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (\pi i)^{n-k} \left(\frac{\pi(\log a)^k}{2^{n-k+1}a} - \frac{I_k}{2}\right).$$

(2) $I_2 = \dfrac{\pi(\pi^2+4(\log a)^2)}{8a}$, $\quad I_3 = \dfrac{\pi\log a(3\pi^2+4(\log a)^2)}{8a}$.

問題 18.3 $f(z) = \log F(z)$, $F(z) = 1-e^{2iz}$ とおく。$-C_5$ のパラメータ表示を $z_1(t) = ti$, C_3 のパラメータ表示を $z_2(t) = \pi + ti$ $(\delta \le t \le a)$ とすると $f(z_1(t)) = f(z_2(t))$ だから

$$\int_{C_3} f(z)\ dz + \int_{C_5} f(z)\ dz = \int_{C_3} f(z)\ dz - \int_{-C_5} f(z)\ dz$$
$$= \int_\delta^a (f(z_2(t)) - f(z_1(t)))i\ dt = 0.$$

$|w| < 1/2$ のとき

$$|\log(1-w)| \le |w| + \frac{|w|^2}{2} + \frac{|w|^3}{3} + \cdots + \frac{|w|^n}{n} + \cdots$$
$$< |w|(1+|w|+|w|^2+\cdots) = \frac{|w|}{1-|w|} < 2|w|.$$

よって a が十分大きいとき

$$\left|\int_{C_4} f(z)\ dz\right| = \left|\int_{-C_4} f(z)\ dz\right| = \left|\int_0^\pi \log(1-e^{2i(x+ia)})dx\right|$$
$$\le \int_0^\pi 2e^{-2a}\ dx = 2\pi e^{-2a} \to 0 \quad (a\to+\infty).$$

$f(z)=f(z+\pi)$ だから

$$\int_{C_2+C_6} f(z)\ dz = -\int_{-C_2-C_6} f(z)\ dz = -\int_{C_7} f(z)\ dz.$$

ここで C_7 は半円 $z(\theta)=\epsilon e^{i\theta}$ $(0\le\theta\le\pi)$. 問題 14.1 より

$$|F(z(\theta))| = |1-e^{2iz(\theta)}| \le e^{2\epsilon}-1.$$

ϵ が十分小さいとき

$$2\epsilon < e^{2\epsilon}-1 < 1$$

ゆえ

$$|\log|F(z(\theta))|| = \log\frac{1}{|F(z(\theta))|} < \log\frac{1}{2\epsilon}.$$

ϵ が十分小さいとき

$$|f(z(\theta))| \le |\log|F(z(\theta))|| + |\arg F(z(\theta))| < \log\frac{1}{2\epsilon}+\frac{\pi}{2} < 2\log\frac{1}{2\epsilon}.$$

よって

$$\left|\int_{C_7} f(z)\ dz\right| \le \int_0^\pi 2\epsilon\log\frac{1}{2\epsilon}d\theta \to 0 \quad (\epsilon\to+0).$$

$C=C_1+\cdots+C_6$ の周上およびその内部で $f(z)$ は正則だから

$$0=\int_C f(z)dz.$$

$\epsilon\to+0$, $a\to+\infty$ とすると

$$0=\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi \log(-2ie^{ix}\sin x)\ dx.$$

x が 0 から π まで動くとき，$F(x)$ は 1 中心半径 1 の円周上を 0 から出発して反時計回りに一周するから

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \log(-2ie^{ix}\sin x)\ dx &= \int_0^\pi \log(2e^{i(x-\pi/2)}\sin x)\ dx\\ &= \pi\log 2 + i\int_0^\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx + \int_0^\pi \log(\sin x)\ dx.\end{aligned}$$

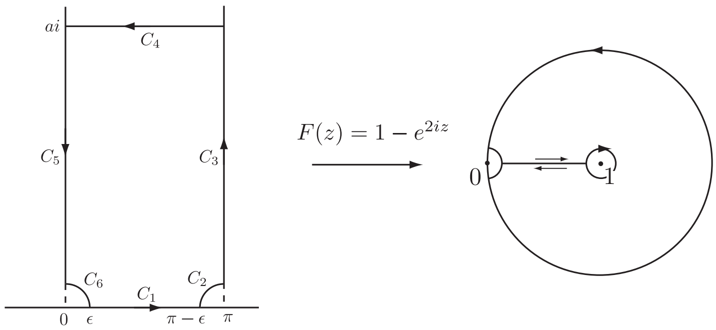
よって

$$\int_0^\pi \log(\sin x)\ dx = -\pi\log 2.$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\ dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \log(\sin x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\ dx$$

と (1) の結果から従う。



第 19 章の問題

問題 19.1　$z = \pm\left(n + \dfrac{1}{2}\right) + iy$ $(|y| < n + \dfrac{1}{2})$ とすると $e^{\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i} = \pm(-1)^n i$ だから

$$\left|\frac{1}{\sin \pi z}\right| = \frac{2}{|e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}|} = \frac{2}{e^{\pi y} + e^{-\pi y}} \leq 1.$$

$z = x \pm \left(n + \dfrac{1}{2}\right) i$ $(|x| < n + \dfrac{1}{2})$ とすると

$$\left|\frac{1}{\sin \pi z}\right| \leq \frac{2}{||e^{i\pi z}| - |e^{-i\pi z}||} = \frac{1}{\sinh\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi} \leq \frac{1}{\sinh \frac{3\pi}{2}}.$$

問題 19.2　(1)

$$1 = \left(B_0 + (B_1 - 1)t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n\right)\left(1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \cdots\right)$$

が成り立つから

$$B_0 = 1,\ \frac{B_0}{2} + B_1 - 1 = 0,\ \frac{B_2}{2} + \frac{B_1 - 1}{2} + \frac{1}{6} = 0.$$

これかから

$$B_0 = 1,\ B_1 = \frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6}.$$

(2)

$$\frac{1}{2} \frac{t}{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}}(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}) = \frac{te^t}{e^t - 1} - \frac{t}{2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

で左辺は偶関数だから，$n > 1$ が奇数のとき，$B_n = 0$.

(3)

$$\begin{aligned}\cot \pi z &= i\frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1} = \frac{2i}{2\pi iz}\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!}(2\pi iz)^n\right) \\ &= \frac{1}{\pi z}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}(-1)^k (2\pi)^{2k} z^{2k}\right) \\ &= \frac{1}{\pi z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} \pi^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}.\end{aligned}$$

第 21 章の問題

問題 21.1　(21.1) を用いると，コーシーの積分定理と積分公式により

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)p_k}{z-a_k}dz - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)q_k}{z-b_k}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz$$
$$= \sum_{k=1}^{m} g(a_k)p_k - \sum_{k=1}^{n} g(b_k)q_k.$$

問題 21.2　複素数 $P_1,\ldots, P_k$ を $f(z)$ の零点，m_i を P_i の位数，複素数 $Q_1,\ldots, Q_i$ を $f(z)$ の極，n_i を Q_i の位数とする。$|z|$ が十分大きいとき $f(z) = z^m g(z)$, ∞ の近傍で

$$g(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots, \quad c_0 \neq 0$$

とする。このとき，$m > 0$ ならば ∞ は $f(z)$ の m 位の極で, $m < 0$ ならば ∞ は $-m$ 位の零点である。$m = 0$ のとき，$f(z)$ は ∞ で正則。R を $\{z : |z| > R\}$ で $g(z)$ が零点も極ももたないよう十分大きく取る。C を正の向きを与えた円 $|z| = R$ とすると問題 21.1) より

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\ dz = \sum_{i=1}^{k} m_i - \sum_{j=1}^{l} n_j.$$

$|z| > R$ で

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z} + \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{m}{z} + h(z).$$

ここで

$$h(z) = \frac{d_2}{z^2} + \frac{d_3}{z^3} + \cdots$$

と書ける。よって

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\ dz = m + \frac{1}{2\pi i}\int_C h(z)\ dz.$$

$h(1/w) = d_2w^2 + d_3w^3 + \cdots$ ゆえ C の $w = 1/z$ による像を Γ とおくと（向きは負の向きになる）

$$\int_C h(z)\ dz = \int_\Gamma h\left(\frac{1}{w}\right)\left(-\frac{1}{w^2}\right)dw = 0.$$

したがって

$$-m + \sum_{i=1}^{k} m_i - \sum_{j=1}^{l} n_j = 0.$$

問題 21.3　$f(z) = 7z + 2$, $g(z) = z^5$ とおく。$|z| = 1$ のとき

$$|f(z)| = |7z + 2| \geq 7|z| - 2 = 5 > 1 = |z^5| = |g(z)|$$

だから，単位円内の $f(z)$ の零点の個数（$-2/7$ の 1 個）と $f(z) + g(z)$ の零点の個数は等しい。

$|z| = 2$ のとき

$$|g(z)| = |z^5| = 32 > 16 = 7|z| + 2 \geq |7z+2| = |f(z)|.$$

したがって円板 $D(0,2)$ 内の $g(z)$ の零点の個数（$g(z)$ は 0 に 5 重の零点をもつ）と $f(z)+g(z)$ の零点の個数は等しいので，$f(z)+g(z)$ は $D(0,2)$ に 5 個の零点をもつ。前半の結果と合わせると，その中の 4 つが円環領域 $\{z : 1 < |z| < 2\}$ 内にある。

第 22 章の問題 setcountersection22

問題 21.1

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
&\qquad + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
&\qquad + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},
\end{aligned}$$

Cauchy-Riemann の方程式と H, u, v の調和性により

$$\begin{aligned}
\Delta U &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) + 2\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) \\
&\quad + \frac{\partial H}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial H}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial v^2}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}\right)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) + 2\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

問題 21.2 (1) $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ とし，円環領域 $\Omega = \{z : r_1 < |z| < r_2\}$ とおく。$\overline{\Omega}$ で C^2 級の関数 U, V に対して Green の公式

$$\iint_\Omega (U\Delta V - V\Delta U)dxdy = \int_{\partial\Omega}\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds$$

が成り立つ。ただし $\partial/\partial n$ は外法線方向微分。とくに U, V が調和関数ならば

$$\int_{\partial\Omega}\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds = 0$$

ここで $U=1$, $V=u$ とおくと

$$\int_{\kappa(0,r_2)} r\frac{\partial u}{\partial r}d\theta \quad -\int_{\kappa(0,r_1)} r\frac{\partial u}{\partial r}d\theta = 0.$$

よって $A(r)$ は定数。$U=\log r$, $V=u$ とおくと

$$\int_{\kappa(0,r_2)} \left(\log r\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) rd\theta - \int_{\kappa(0,r_1)} \left(\log r\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) rd\theta = 0.$$

よって $B(r)$ は定数。
(2)$a=A(r)$, $b=B(r)$ とおけばよい。

第 23 章の問題

問題 23.1　(23.6) は絶対収束するから，積の順序を入れ替えてよく

$$\begin{aligned}\sin 2\pi z &= 2\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{(2n)^2}\right)\\ &= 2\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right)\\ &= 2\sin\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right).\end{aligned}$$

よって

$$\cos\pi z = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right).$$

問題 23.2　(1) ガンマ関数の性質を用いて

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} &= -\frac{1}{z}\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -\frac{1}{z}\left(z(-z)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1-\frac{z}{n}\right)\right)\\ &= z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2}\right) = z\frac{\sin\pi z}{\pi z}\end{aligned}$$

よって

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

(2) (1) に $z=1/2$ を代入すると $\Gamma(1/2)>0$ ゆえ

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

第 24 章の問題

問題 24.1　2 つの複素数 $z=x+iy$ と $w=u+iv$ 間の距離を

$$d(z,w) = \max\{|x-u|, |y-v|\}$$

で定める（これは実際，距離の公理をみたす。）自然数 n と整数 l, m に対して

$$Q_n(l,m) = \frac{l+im}{2^n}, \frac{l+1+im}{2^n}, \frac{l+i(m+1)}{2^n}, \frac{l+i(m+1)}{2^n} \text{ を頂点にもつ閉正方形}$$

とする。まず D は有界領域とする。∂D を D の境界とする。ある l, m があって $Q_n(l,m) \subset D$ となるような最小の n を n_1 とおき，$Q_{n_1}(l,m) \subset D$ のとき，D_1 を $Q_{n_1}(l,m)$ の内部とする。

$$d_1 = \inf\{d(z,w) : z \in D_1, w \in \partial D\}$$

とし，

$$\frac{1}{2^n} < d_1 \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

をみたす n を n_2 とおく。$Q_{n_2}(l,m) \subset D$ をみたす正方形で $\overline{D_1}$ と交わるもの全体の和集合を考え，その内部を D_2 とおく。D_2 の境界は有限個の水平線分と垂直線分からできている。D_2 は d に関する D_1 の $1/2^{n_2}$ 近傍を含むから $\overline{D_1} \subset D_2$ である。次に

$$d_2 = \inf\{d(z,w) : z \in D_2, w \in \partial D\}$$

とし，

$$\frac{1}{2^n} < d_2 \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

をみたす n を n_3 とおく。$Q_{n_3}(l,m) \subset D$ をみたす正方形で $\overline{D_2}$ と交わるもの全体の和集合を考え，その内部を D_3 とおく。以下この操作を繰り返して D の部分領域の列 D_k $(k = 1, 2, ...)$ を D_k の境界が有限個の区分的にレギュラーな閉曲線の和 (有限個の水平線分と垂直線分からできている）で $\overline{D_k} \subset D_{k+1}$ となるものをつくる。このとき

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$$

である。$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ とおく。もし $z \in D \setminus \Omega$ が存在すれば，D_1 の点 z_0 と z を D 内で結ぶ曲線 γ をとり，d を γ と ∂D との間の距離とする。 γ は Ω の境界と交わり，各 $D_k(k = 1, 2, ...)$ は閉包ごと Ω に含まれるから，γ 上に D_k の点 z_k が存在する。すると z_k と ∂D までの距離は d 以下であるが，一方 $1/2^{n_k-1}$ 未満であるから k が十分大きいと矛盾である。よって $D = \Omega$.

D が有界領域でないときは，$k = 1, 2, 3, ...$ に対して $A_k = D \cap \mathbb{D}(k)$ とし, $z \in A_k$ に対して $d_k(z)$ を z から A_k の境界 ∂A_k までの距離とするとき

$$B_k = \{z \in A_k : d_k(z) \geq 1/k\}$$

とおく。すると前半の結果より D の有限個の区分的にレギュラーな閉曲線で囲まれた部分領域 D_k で $B_k \cup \overline{D_{k-1}} \subset D_k \subset \overline{D_k} \subset A_k$ をみたすものが存在する。(A_k や B_k が空集合となるような k はあっても有限個のみなのでそれらは除いて考える。また $D_0 = \emptyset$ とおく。) このとき，$\{D_k\}$ が求めたい領域列となる。

参考文献

[1] Ahlfors, L. V., *Complex Analysis*, McGraw Hill Higher Education , 1980.

[2] Devaney, R. L., 後藤憲一訳，國府晉司，石井豊，新居俊作，木坂正史新訳，新訂版　カオス力学系入門　第 2 版，共立出版，2003 年

[3] Farkas, H. M. and I. Kra, *Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Math., 71, Springer, 1992.

[4] Howie, J. M., *Compex Analysis*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2003.

[5] 岸正倫，藤本坦孝，複素関数論，学術図書出版社，1980 年

[6] 楠幸男，解析函数論，廣川書店，1962 年

[7] Pommerenke, Ch., and G. Jensen, *Univalent Functions*, Vandenhoeck und Ruprecht, 1975.

[8] 佐藤宏樹，複素解析学，現代数学ゼミナール 15，近代科学社，1991 年