図形の大きさや複雑さを測る（数学アゴラ）

(担当：中西敏浩)

1　面積とは

ご存知のように「長さ」は曲線という１次元の広がりをもつ図形の大きさを、「面積」は２次元の広がりをもつ図形の大きさを表わすときに使います。(「長さ」は時間の経過の大きさを表わすときにも使いますが。) これらの概念は日常身の回りでもよく使われます。自分の身長はいくつだとか、２つの都市がどれだけ離れているのかとか、今度引っ越すアパートの間取りはどれぐらいだとか、耕作地の広さはどれぐらいなのかとか。

「長さ」や「面積」は、２つのものを比較することから生まれたのですから、最初は「私は兄さんより背が高い」とか「ゾウの鼻は人間の鼻より長い」、「今度引っ越すアパートは今のアパートより広い」で用が足りていたのでしょう。しかしおばあさんが息子の家に電話をして、孫がどれぐらい成長したかを尋ねたとしましょう。息子の嫁が「食器棚の３番目の引き出しのところまで背が伸びたわよ」と答えたとしたら、おばあさんには食器棚が見えませんから孫の大きさがわかりません。２人に共通した長さした尺度が必要です。多くの人が同じ「長さ」や「面積」の認識をもてるようになるために度量衡が必要となりました。

1.1　度量衡

▼長さ▼

単位	記号	1単位の換算表
メートル	m	
ミクロン	μ	$10^{-6}m$
オングストローム	Å	$10^{-10}m$
海里	nm	$1852m$
ヤード	y	$0.9144m$
フート（呎）	ft	$0.3048m$
インチ (吋)	in	$0.0254m$
チェーン	$chain$	$20.1168m$
マイル(哩)	$mile$	$1609.34m$
ミル	mil	$2.54 \times 10^{-5}m$
尺		$0.3030m$
里		$3927.3m$

我々になじみがある「メートル」単位は、もともとは地球の子午線の極と赤道間の距離の１千万分の１をもって定められました。1983年以降は光の真空中の波長の1650763.73倍として定められています。尺、インチやフートは身体の一部の長さに由来します。尺の長さを指で測るしぐさが「尺取り虫」の名の由来になっています。１ヤードが３フィート(フートの複数形はフィートです)、１インチは１フートの１２分の１です。１ヤードはイギリスのヘンリー一世の鼻の先から腕を前に突き出したときの親指の先までの長さという説もあります。1海里は地球の中心角１分に対する海面上の距離からきていて、航海の際に天体を観

測しながら距離がわかるので便利です。マイルはローマ由来の単位で、名前から推測できるように1000歩からきたものです。マイルはイギリスで使われますが、元来イギリスで誕生した単位ではないので、１マイル $=5280$ フィートというきりの悪い数字になっています。

▼面積▼

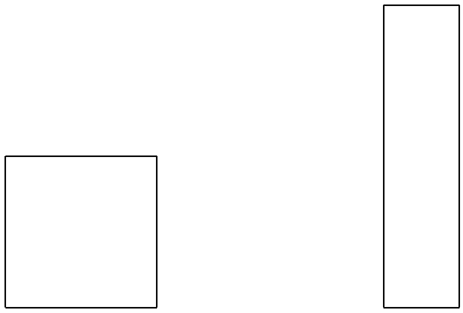
単位	記号	1単位の換算表
平方メートル	m^2	
アール	a	$100m^2$
平方ヤード	yd^2	$0.8361m^2$
エーカ	$acre$	$4046.9m^2$
坪		$0.3025m^2$
反		$991.74m^2$

「1坪」は一辺が6尺の正方形の広さ。

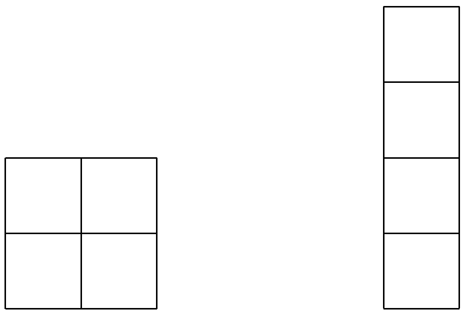
上の表を見ると分かるように面積の単位は長さの単位をもちいて定められる場合が多い。たとえば１辺の長さが１メートルの正方形の面積が１平方メートルであるように。エーカの語源は２頭の牛に鋤を引かせるための道具である「くびき」の古代ギリシャ語です。エーカは２頭の牛が半日間かかって耕す面積から来ました(他にも諸説あり)。「坪」は今でも宅地面積を測るのに使われます。また「坪」と同義である「歩（ぶ)」や「反」やその十分の一の「畝（せ)」は農耕地の面積に使われます(１畝は60坪)。たとえば稲作の「減反政策」という言葉を聞いたことがあるでしょう。[1]

「面積」を単位で表わすことから異なる形をした図形が同じ面積をもつための一つの条件として「分割合同」の概念が生じたのではないかと思われ、その意味で「単位」は重要です。下の二つの長方形(矩形)は異なる形をしていますが、同じ面積をもちます。

[1] この節の記述は[1]を参考にさせてもらいました。



それは



このように分割してやればどちらも同じ大きさの４つの正方形に分割できるからです。

平面（あるいは空間〕内の２つの多角形〔多面体〕A と B は、それぞれ適当に有限個の部分 $A_1, A_2, ..., A_n$, $B_1, B_2, ..., B_n$ に分けて、A_i と B_i とが合同となるとき（すなわち平行移動と回転移動と直線に関する反転をもちいて一方を他方に重ね合わすことができるとき)「分割合同」であるといいます。分割合同な図形は同じ面積〔体積〕をもちます。逆に平面の多角形については、面積が等しければ分割合同であることがいえます。しかし３次元空間内の２つの多面体について、同じ体積をもてば合同分割であるかどうかという問題(Hilbert の第３の問題)は、Dehn によって否定的に解決されました[2]。

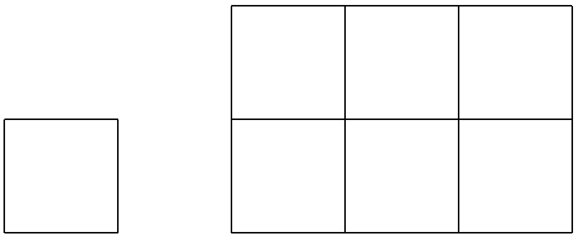
[2]後ででてくるバナッハ・タルスキの定理の結果と混同しないよう、ここでは多面体への分割であることを注意しておく。

1.2 面積の基本

さて、面積の単位が一つ与えれたとして、これから平面上の図形の面積をどのように測るのかについて考えましょう。「単位」は後で付け足せばよいようなものなので、我々は面積を単位記号をつけずに表記することにします。まず基本となるのは１辺が１単位長さの正方形の面積です。

１辺の長さが 1 である正方形の面積は 1 である。

すると隣り合う辺の長さが 1 と 2 である長方形（矩形）に２つの面積 1 の正方形をそれらが重ならないように、そして隙間が生じないように敷き詰めることができるので、この長方形の面積は 2 ということになります。より一般に m, n を自然数として、隣り合う辺の長さが m, n である長方形に mn 個の面積 1 の正方形を重ならないように、隙間が生じないように敷き詰めることができるので、この長方形の面積は mn です。

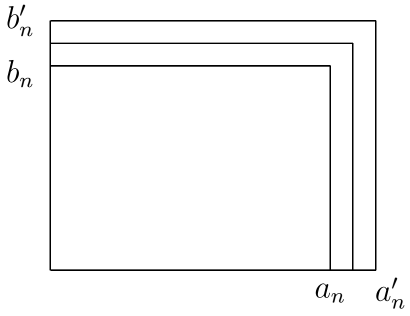


今度は隣り合う辺の長さが 1 と 1/2 である長方形を考えましょう。これは面積 1 の正方形のちょうど半分の面積をもつと考えられますから、面積は 1/2 です。同様に面積 1 の正方形を縦に n 等分してできる長方形の面積は $1/n$ です。さらにこの長方形を横に m 等分してできる長方形の面積は $1/n$ 割ることの m で $1/mn.$ すると有理数を辺の長さにもつ長方形の面積も求まります: 辺の長さが p_1/q_1 と p_2/q_2 (p_1, p_2, q_1, q_2 は自然数) の長方形は1辺の長さが $1/q_1q_2$ の正方形（その面積は $(1/q_1q_2)^2$) を横に p_1q_2 個、縦に p_2q_1 個と全部で $(p_1q_2)(p_2q_1)$ 個の正方形で敷き詰めることができるので、面積は $(p_1/q_1) \times (p_2/q_2)$ となります。

辺の長さが無理数の長方形の場合はどうでしょうか？隣り合う辺の長さが a と b である長方形 Q を考えます。このとき有理数の列 a_n, a'_n, b_n, b'_n $(n = 1, 2, ...)$, で

$$a_n \leq a \leq a'_n \quad b_n \leq b \leq b'_n$$

さらに a_n, a'_n は a に収束し、b_n, b'_n は b に収束するものを選びます。(もし例えば a が有理数の場合は $a_n = a'_n = a$ としておきます。)



長方形の一つの頂点を基点として、辺の長さ a_n, b_n の長方形 Q_n と辺の長さ a'_n, b'_n の長方形 Q'_n を描くと Q は前者を含み、後者に含まれますから

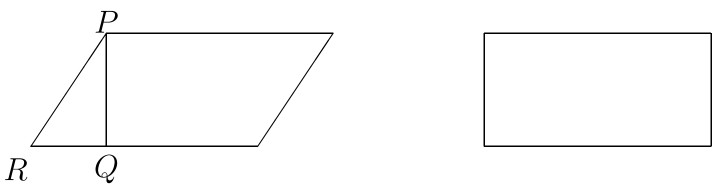
$$Q_n \text{ の面積 } a_n b_n \leq Q \text{ の面積} \leq Q'_n \text{ の面積 } a'_n b'_n.$$

極限をとれば Q の面積は ab.

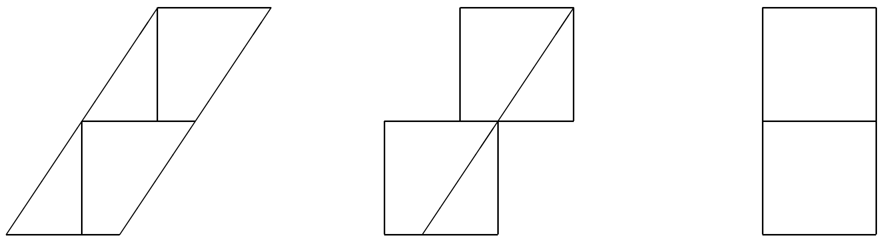
隣り合う辺の長さが a, b である長方形の面積は ab である。

1.3 平行四辺形・三角形の面積

長方形の面積をもとにして平行四辺形の面積を求めましょう。
(1) 図のように点 P から垂直に下ろした直線が底辺と Q で交われば、三角形 PQR を切り取って、それを辺 PR の対辺にくっつけることによって長方形ができます。これからこの平行四辺形の面積は(底辺の長さ) $\times$ (高さ)ということができます。



(2) もし、平行四辺形の頂点 P から垂直に下ろした直線が底辺と交わらない場合は、この平行四辺形を図のようにいくつかの水平線分で切れば、それによって生じる小平行四辺形が(1)の条件を満たすようにできます。この場合も平行四辺形の面積は(底辺) $\times$ (高さ)です。



平行四辺形の面積がわかると三角形の面積が求まります。T を一つの三角形として、それのコピーを一つ用意し、それを図のように T とくっつけると平行四辺形が得られます。T の面積はこの平行四辺形の面積の半分と考えられますから、三角形 T の面積は (底辺の長さ) $\times$ (高さ)/2 となります。

1.4　多角形の面積

有限個の線分の和で囲まれた図形を多角形といいます。多角形はその内部にいくつかの線分を引くことによって有限個の三角形に分割できます。したがって多角形の面積はこれらの三角形の面積の和で求まります。

1.5　面積の性質

これまで暗にもちいた面積の次の2つ性質を明確にしておきましょう。

(1) 平面上の平行移動、回転移動、あるいは直線に関する折り返しを平面上の運動といいます。面積は運動によって不変である。

(2) 図形 A が図形 B を含んでいたら、A の面積は B の面積より小さいことはない。

(3) 図形 A と B が重なり合う部分をもたなければ、A と B を合わせた図形($A \cup B$ とかくことにします)の面積は A の面積と B の面積の和。（このことから帰納的に、有限個の図形 $A_1, A_2, ..., A_n$ のどの2つも重なり合う部分がなければ、$A_1, A_2, ..., A_n$ を合わせた図形 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ の面積は A_1, A_2,..., A_n の面積の和となることがわかります。）（有限加法性）

1.6 円の面積

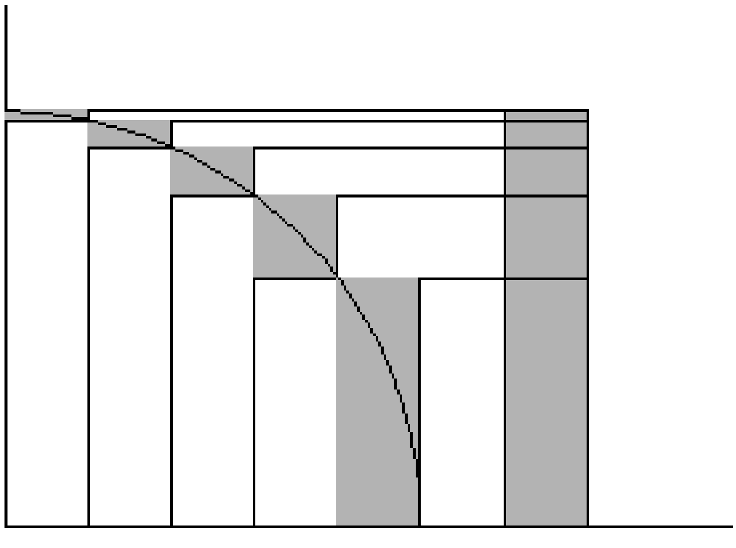
次に円の面積を求めることを考えましょう。ここでは半径 1 の円の面積を求めましょう。今 xy座標平面に円

$$x^2 + y^2 = 1$$

を描いて、その内部の面積を求めてみます。まずその第 1 象限に含まれる部分の面積がわかればそれを 4 倍すればいいですから、第 1 象限に含まれる部分の面積を求めてみます。

x 軸上の $[0,1]$ 区間を n 等分します。0 から 1 の方に数えて k 番目の小区間の上に、高さ $\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ の矩形 I_k と高さ $\sqrt{1-\left(\frac{k-1}{n}\right)^2}$ の矩形 J_k を立てます。このとき

$$I_k \text{ の面積} = \frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}, \qquad J_k \text{ の面積} = \frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{k-1}{n}\right)^2}.$$



円のグラフ $y=\sqrt{1-x^2}$ は $0 \le x \le 1$ において単調減少ですから k 番目の小区間の真上にある円の部分は I_k を含み、J_k に含まれます。したがって円の面積(これを慣例に則って π で表わしましょう)は

$$F(n)=4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}<\pi<G(n)=4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{k-1}{n}\right)^2}$$

をみたすはずです。n にいろいろな値を入れて計算すると下図のようになります。ただし小数点以下10桁より後の部分は切り捨てています。

▼円の面積▼

n	F(n)	G(n)
1	0	1
10	2.904518326	3.304518326
100	3.120417032	3.160417032
500	3.137487477	3.145487477
1000	3.139555467	3.143555467
1500	3.140239078	3.142905745
10000	3.141391478	3.141791478

ところで $F(n)$ は n について単調増加、一方 $G(n)$ は n について単調減少になります（このことを証明してください)。すなわち

$$F(1)<F(2)<\cdots<F(n)<G(n)<\cdots<G(2)<G(1).$$

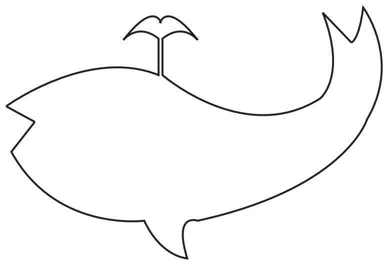
さらに図のようにしてみれば $G(n)$ と $F(n)$ の差は $G(n)-F(n)=4/n$ で、これは $n\to\infty$ のとき 0 に収束します。すると π の値は両側から限りなく差し迫ってくる $F(n), G(n)$ の極限の値でなければならならいことがわかるでしょう。その値は

$$3.14159265358979323846264338327850288419716939\cdots$$

で、大学初年次に習う微積分学を用いて無理数であることが証明されます。ただし $F(n), G(n)$ の値を計算するというのは円周率 π の近似値を求めるには効率が悪く、実際にはもっとさまざまな工夫を凝らして円周率の近似値を求めます。

1.7　ジョルダン可測集合

上で考えた円の面積の求め方を図形の面積の求め方として定式化しておきましょう。サンプルとして図のような曲線で囲まれたxy平面上の図形 A を考えます。A は十分大きな正方形 Q の内部に含まれているとします。



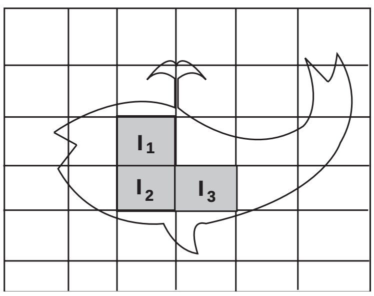
Q を有限個の x 軸や y 軸に平行な線分で分割しましょう。この分割を、記号 Δ で表わします。この分割の目（小矩形）の中で A に含まれるのものを、番号を付けて $I_1, I_2, ..., I_m$ としましょう。そして

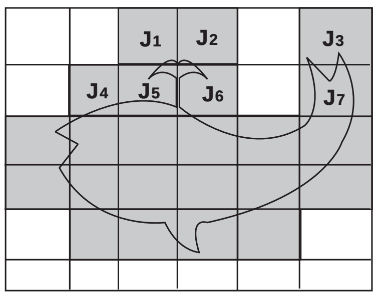
$$\underline{S}_\Delta = \sum_{i=1}^{m} I_i \text{ の面積}$$

とおきます。（ただし分割の目で A に含まれるものがないときは、左辺の値は 0 とおきます。）$I_1, I_2, ...,$ I_m は A に含まれますから、もし A が面積をもてば $\underline{S}_\Delta \leq A$ の面積 ですね。今、ありとあらゆる Q のこのような分割 Δ を考えると、それらに応じて数 $\underline{S}_\Delta$ の集まりが得られます。今述べたように、もし A が面積をもてばそれらのどの値より大きいか等しいはずです。そこで次のように定まる数 $\underline{m}(A)$ を考えます。

- 任意の分割 Δ に対して $\underline{S}_\Delta \leq x$ をみたす数 x のなかの最小のもの。

$\underline{m}(A)$ を A の<u>内面積</u>といいます。もし A が面積をもてば、その値は $\underline{m}(A)$ 以上のはずです。





今度は一つの分割 Δ に対して、分割の目（小矩形）の中で A を含むものを、番号を付けて J_1, J_2, ..., J_n としましょう。そして

$$\overline{S}_\Delta = \sum_{i=1}^{n} J_n \text{ の面積}$$

とおきます。J_1, J_2, ..., J_n は A に含まれますから、もし A が面積をもてば $\overline{S}_\Delta \geq A$ の面積 ですね。今、ありとあらゆる Q のこのような分割 Δ を考えると、それらに応じて数 $\overline{S}_\Delta$ の集合が得られます。もし A が面積をもてばそれらのどの値より大きいか等しいはずです。次のように定まる数 $\overline{m}(A)$ を考えます。

- 任意の分割 Δ に対して $\overline{S}_\Delta \geq x$ をみたす数 x のなかの最大のもの。

$\overline{m}(A)$ を A の<u>外面積</u>といいます。もし A が面積をもてば、その値は $\overline{m}(A)$ 以下のはずです。よって

$$\underline{m}(A) \leq A \text{ の面積} \leq \overline{m}(A)$$

いままで、もし A が面積をもてばその値は $\underline{m}(A)$ 以上、$\overline{m}(A)$ 以下のはずだ、なんていいましたが、発想を逆転して A が面積をもつことを $\underline{m}(A)$、$\overline{m}(A)$ をもちいて定義します。もし

$$(*) \qquad \underline{m}(A) = \overline{m}(A)$$

ならば、この値を $m(A)$ とおけば、これが A の面積であるはずなので、

A について $(*)$ が成り立つとき A は（ジョルダンの意味で）面積をもつといい、$m(A)$ を A の面積という。

この面積の定義は納得のいくものと思います。実際、大学の１，２年次の微分積分学で習う項目ではこの面積の概念のもとで何の不便もなしに授業を進めることができます。また、この面積について **1.5** で述べた３つの性質 (1),(2),(3) が成り立つことがわかります。しかし平面上のあらゆる図形・集合の面積を求めようと考えるならば、この面積の定義でが面積が求まらない集合がたくさん存在します。

例. xy 平面の点 (x, y) は、x,y のどちらもが有理数であるとき、有理点であるといいます。有理点は xy 平面に稠密に存在します。すなわち xy 平面内のどんなに小さい矩形のなかにも有理点は必ずあります。逆に有理点でない点も xy 平面に稠密に存在します。A として $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ を頂点にもつ正方形 I に含まれる有理点全体の集合とします。すると上で定義した意味では A は面積をもちません。なぜなら I の有限個の分割 Δ を考えると、どの目にも有理点でない点が含まれますから、A に含まれる分割の目がない。よって $\underline{S}_\Delta = 0$. これがすべての分割についていえるから $\overline{m}(A) = 0$. 一方、どの目にも有理点が含まれますから, $\overline{S}_\Delta$ はすべての分割の目の面積の和。すなわち 1. これがすべて

の分割についていえるから $\overline{m}(A) = 1$. したがって上の面積の定義からは A はジョルダンの意味で面積をもたないことになってしまいます。

面積や体積をもつ集合とは何かということをより深く追及して、より面積をもつ集合の世界を広げたのがフランスの数学者ルベーグ (H. Lebesgue, 1875-1941)が創始したルベーグ測度論・ルベーグ積分論と呼ばれる理論です。

1.8 ルベーグの測度論

ルベーグ測度論の最初の一歩は面積を測るときに無視してよい図形の世界をとことん広げていくことにあります。例として上で現われた集合 A の面積を 0 とすることの妥当性について述べます。後で証明するように A の点すべてに1番、2番、3番、...と番号を付けていくことができます。n 番目の点を P_n で表わします。次に ϵ (イプシロン)を勝手な正の数とします。P_n を中点にもつ１辺の長さ $\sqrt{\epsilon/2^n}$ の正方形 Q_n を描きます。すると P_n は Q_n に含まれますから、A 全体は Q_n を全部合わせてできる図形に含まれます。このことから

$$A \text{ の面積} \leq \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \text{ の面積} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon.$$

ϵ はどうな数字でもよかったので、ϵ に100万分の1を代入すると A の面積は100万分の1以下、ϵ に100億分の1を代入すると A の面積は100億分の1以下、ϵ に代入する数をだんだん 0 に近づくようにとっていけば、A はどんな正の数より小さくないといけないので A の面積 $= 0$ としなければいけないでしょう。この A の例のように,どんな小さい正の数 ϵ に対しても、面積の総和が ϵ 以下となるようないくつかの（この場合無限個でもよい）矩形で覆われるような図形（集合）を（ルベーグの意味で）測度 0 の集合といいます。

ルベーグ測度論における「面積」の定義では一つの図形にこうした測度 0 の集合を足しても引いても面積は変わりません。したがって上の例で I から A を除いた図形はルベーグの意味で面積をもち、その面積は I と同じく 1 です。このように面積を求めたい図形に測度 0 の集合をつけたしたり、あるいは測度 0 の集合を引いたりして面積が測りやすい図形へと修正することで、面積を測ることのできる図形の世界をひろげていくことができるのです。

A の面積を測るとき、無限個の正方形 $\{Q_n\}$ をもちいました。これはルベーグの測度論の神髄といってもよいことなのです。以前はジョルダンの面積の定義にもあったように、図形を（有限個の辺をもつ）多角形の有限個で近似することで面積を求めていました。しかしルベーグの測度論ではすでに近似の段階で無限個の多角形をもちいます。その中には[3] の言い回しを借りるならば、原子核や陽子の大きさよりはるかに小さい、想像を絶するような小さい多角形も含まれてきます。羊羹を切り分けることなどから 1 という量を

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, \qquad 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

を認識することはあっても

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

と見ることは日常生活の中ではまずありえないことでしょう。しかしルベーグの成功はそうした非日常的だが論理的に正しいことを大胆に取り入れたことにありました。

ルベーグの意味で面積をもつ図形についていえるよいことは**1.5.**の (1), (2) はもちろん (3) のかわりに次のことが成り立つことです。

(4) 無限個の図形 $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ がルベーグの意味で面積をもつ図形であり、どの２つも重なり合う部分をもたないとする。このときこれらの図形を合わせたもの $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$ は面積をもち $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ の面積の和に等しい（完全加法性）。

ルベーグ測度論について勉強したい人のためにいくつか参考書を挙げておきます。これら以外にも数多くあります。

伊藤清三著「ルベーグ積分入門」裳華房数学選書４
溝畑茂著「ルベーグ積分」岩波全書
垣田高夫著「ルベーグ積分しょーとこーす」日本評論社
志賀浩二著「ルベーグ積分３０講」朝倉書店
岸正倫著「ルベーグ積分」サイエンスライブラリ現代数学への入門 7、サイエンス社

またルベーグのオリジナルの論文の翻訳も出版されています。

H. ルベーグ著吉田耕作・松原　稔訳・解説「積分・長さおよび面積 Intégrale, Longueur, Aire」現代数学の系譜３　共立出版

また参考文献に載せた[2] は英語の書物ですが、各節に練習問題があり、実力をつけるのに役に立ちます。

2　集合

2.1　集合とはなにか？

整数で 1 と自分自身以外には約数をもたないものを素数といいます。ただし 1 は素数とはしません。すると偶数の素数は 2 のみ、2 より大きい素数を小さいものから順にに書き出していくと

$$\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, ...\}$$

となりますが、私はこの奇素数のリストを完成させることができません。それはまず奇素数は無限個あるからです。それに素数を見つける手続きはとても時間を要するものです。でもドイツの数学者ガウス(C. F. Gauss)は次の平方剰余の相互法則を証明しました。

まず p を奇素数、a を整数とし、Legendre の記号

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} +1 & X^2 \text{ を } p \text{ で割ると余りが } a \text{ となるような } X \text{ が存在するとき} \\ -1 & X^2 \text{ を } p \text{ で割ると余りが } a \text{ となるような } X \text{ が存在しないとき} \end{cases}$$

を定めると、2 つの奇素数 p, q に対して

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{(p-1)/2\cdot(q-1)/2}.$$

たとえば $\left(\frac{3}{5}\right) = -1$, $\left(\frac{5}{3}\right) = -1$,一方 $(3-1)/2\cdot(5-1)/2 = 2$ なので、このガウスの定理は確かに成り立っている。しかしこの定理を証明するのに全ての素数を当てはめて確かめなければいけないのでしょうか？いやそんなことはありません。素数の定義にもとづけば、別に無限個の数を当てはめて確かめなくても証明できるのです。

このように考える対象が無限個あっても、その対象を明確に規定できるのなら、それらすべてが有する性質を導き出すことができる場合があります。<u>集合</u>という概念は、考えるべき対象の集まりで、かつそれに属するものがはっきりとわかるものを述べるのに用います。1 つの集合が与えられたとき、その集合に属するものを、その集合の<u>元</u>（あるいは要素）といいます。

ここで集合に関する用語や演算について、少し述べておきます。

a が集合 A の元であることを $a \in A$ で表わします。集合 A, B があって、A の任意の元が B にも属するとき、A は B の部分集合であるといい、記号で $A \subset B$ で表わします。これは $A = B$ の場合もあることを意味しますので注意して下さい。また便宜上全く要素を含まない集合、すなわち空集合を定義

します。空集合を $\emptyset$ で表わします。２つの集合 A, B に対し、A, B のどちらにも属する元全体の集合を A と B の共通部分といい、$A \cap B$ で表わします。また A, B のどちらかに属する元全体の集合を A と B の和集合（あるいは合併集合）といい、$A \cup B$ で表わします。X とその部分集合 A に対して、A に属さない X の元の集合を X における A の補集合といい A^c で表わします。X の２つの部分集合 A, B に対する、次のド・モルガン (de Morgan) の法則はよく知られています。

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

2.2 無限集合

100以下の自然数の集合のように、その集合属する元の個数が有限個である集合を有限集合といい、そうでない集合を無限集合といいます。ところで集合 A が集合 B を含んでいたら、集合として A のほうが B よりも大きいというイメージを持ちがちですが、無限集合の場合はそうともいえません。たとえば A を自然数全体の集合とし、B としてそのなかで奇数のもの全体の集合とします。B は A の部分集合です。ところが次のように A から B への1対1対応がつきます。

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots \\ 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 & \cdots \end{array}$$

このような理解のもとでほんとうに A が B より大きいといえるのでしょうか？

2.3 濃度

２つの集合 A, B の大きさを比較する一つの方法として、２つの集合の間に「１対１対応」があるかどうかを調べます。もし A の元 a に対して、B の元 $f(a)$ が対応して次の２条件を満たすとしましょう。

(1) $a_1, a_2 \in A$ で $a_1 \neq a_2$ ならば $f(a_1) \neq f(a_2)$ が成り立つ。

(2) すべての $b \in B$ に対して $f(a) = b$ となる $a \in A$ が存在する。

このとき集合 A, B は同じ濃度をもつといいます。ちなみに集合 A の各元 a から集合 B の元 $f(a)$ への対応を写像といい、$f : A \to B$ のようにかきます。写像 f が (1) の条件をみたすとき f は単射であるといい、(2) の条件をみたすとき全射であるといいます。全射でありかつ単射でもある写像は全単射であるといいます。２つの集合 A, B が同じ濃度をもつとは、A から B への全単射が存在するということです。

上で見たように A を自然数全体の集合とし、B としてそのなかの奇数全体の集合の集合を考えると B は A の部分集合ですから B の各元 b を自分自身に対応させることによって一つの写像 f_1 がえられます。

これは単射ですが全射ではありません。一方 b に対して $(b+1)/2$ を対応させる写像 f_2 は全単射です。このことから A と B は同じ濃度をもつことが分かります。

2つの有限集合 A と B が同じ濃度をもつための必要十分条件は、それらが同じ数の元を含むことです。

$(0,1)=\{x\in\mathbb{R}:0<x<1\}$ を 0 より大きく 1 より小さい実数全体の集合とする。このとき $(0,1)$ は実数全体と同じ濃度をもつ：なぜなら $f(x)=\tan\pi(x-\dfrac{1}{2})$ は (0,1) から $\mathbb{R}$ への全単射となるから。

2.4 写像について

写像 $f:A\to B$ について、集合 A を f の定義域、集合 B を f の値域といいます。

例. 実数の集合 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像 $f(x)=x^2$ は単射でも全射でもありません: $x\neq 0$ のとき $x\neq -x$ だけれども $f(x)=f(-x)$ なので f は単射ではない。また $y<0$ とすると $x^2=y$ となる実数は存在しないから全射でもないのです。でも $\mathbb{R}_+$ を 0 以上の実数全体の集合として、値域を $\mathbb{R}_+$ に制限すれば $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ は全射、定義域を $\mathbb{R}_+$ に制限すれば $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ は単射、定義域も値域も $\mathbb{R}_+$ に制限すれば $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ は全単射

集合間の写像 $f:A\to B$, $g:B\to C$ が与えられたとき、A の元 a に C の元 $g(f(a))$ を対応させることによって A から C への写像が得られます。これを f と g の合成写像といい $g\circ f:A\to C$ と表わします。写像 $f:A\to B$ が全単射ならば、B の元 b に対して $f(a)=b$ となる A の元 a が必ず存在して（f は全射だから）かつただ一つだけです（f は単射だから)。b にこの a を対応させる写像を $f^{-1}:B\to A$ とかいて、f の逆写像といいます。集合 A の各元 a にそれ自身を対応させる写像を $1_A:A\to A$ を A の恒等写像といいます。すなわち$1_A(a)=a$ です。写像 $f:A\to B$, $g:B\to C$ に対して

(1) f,g が全射ならば $g\circ f$ も全射。

(2) f,g が単射ならば $g\circ f$ も単射。

(3) f が全単射ならば $f^{-1}\circ f=1_A$, $f\circ f^{-1}=1_B$.

A を集合 X の部分集合とするとき、写像 $f:X\to Y$ の定義域を A に制限したとき f がとりうるすべての Y の元の集合を $f(A)$ とかき、A の f による像といいます。ただし $f(\emptyset)=\emptyset$ と約束します。A を集合 Y の部分集合とするとき、f で写すと A に含まれる X の元全体の集合を$f^{-1}(A)$ で表わします。すなわち

$$f^{-1}(A)=\{x\in X:f(x)\in A\}.$$

ここで f は別に全単射でなくても構わないことに注意してください。ただ f が全単射で逆写像 f^{-1} をもてば　$f^{-1}(A)$ は A の f^{-1} による像と一致します。

(4) A, B を Y の部分集合とするとき

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

(5) A, B を X の部分集合とするとき

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

しかし $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ は一般には正しくありません。

2.5 可算集合・非可算集合

自然数全体の集合を以下特別な記号 $\mathbb{N}$ で表わします。$\mathbb{N}$ と同じ濃度をもつ集合を可算無限集合、あるいは単に可算集合といいます。上で見たように奇数の集合は可算集合です。また偶数の集合も可算集合です。整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ も可算集合です。次のように整数をならべていけばよろしいのです。

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & \cdots \end{array}$$

有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ も可算集合です。これを示すには少し工夫が要ります。

まず正の有理数全体の集合 $\mathbb{Q}_+$ が可算集合であることをしめします。正の有理数は 2 つの自然数の比 q/p で表わされます。そこで次のような表を作成しましょう。

$q\backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
1	1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	7/1	$\cdots$
2	1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	7/2	$\cdots$
3	1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	7/3	$\cdots$
4	1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4	7/4	$\cdots$
5	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5	7/5	$\cdots$
6	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	7/6	$\cdots$
7	1/7	2/7	3/7	4/7	5/7	6/7	7/7	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

もちろんこの表は無限に延びているのですべては書ききれませんが、このなかにすべての正の有理数が現われます。まずこの表の中から $p + q = 2$ をみたす数を探すとそれは $1/1 = 1$. これを p_1 とおきます。次に $p + q = 3$ をみたす数を探すとそれらは $2/1$ と $1/2$. $p_2 = 2, p_3 = 1/2$ とおきます。

次に $p+q=4$ をみたす数を探すとそれらは $3/1, 2/2, 1/3$. $2/2=1$ はすでに出てきたのでこれを省いて $p_4=3, p_5=1/3$ とおきます。次に $p+q=5$ をみたす数を探すとそれらは $4/1, 3/2, 2/3, 1/4$. $p_6=4, p_7=2/3, p_8=2/3, p_9=1/4$ とおきます。次に $p+q=6$ をみたす数を探すとそれらは $5/1, 4/2, 3/3, 2/4, 1/5$. このなかで $4/2=2, 3/3=1, 2/4=1/2$ はすでに出てきたのでこれを省いて $p_{10}=5, p_{11}=1/5$ とおきます。このように続けていくとすべての正の有理数を

$$p_1,\quad p_2,\quad p_3,\quad p_4,\quad p_5,\quad p_6,\quad p_7,\quad p_8,\quad p_9,\quad p_{10},\quad \cdots,\quad p_n,\quad \cdots$$

と並べることができます。したがって $\mathbb{Q}_+$ は可算集合です。さらにこれをもとに

$$0,\quad p_1,\quad -p_1,\quad p_2,\quad -p_2,\quad p_3,\quad -p_3,\quad p_4,\quad -p_4,\quad p_5,\quad -p_5,\quad \cdots$$

と並べることによって有理数の集合 $\mathbb{Q}$ が可算集合であることもわかります。

可算集合については次のことが言えます。

(i) 可算集合の部分集合は有限集合（空集合も含む）か可算集合。

(ii) A を可算集合、B を有限集合または可算集合とすると $A\cup B$ は可算集合。

(iii) したがって $A_1, A_2, ..., A_n$ を可算集合か有限集合とし、これらの中に一つでも可算集合が存在すれば、それらの和集合 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ も可算集合。

(iv) より一般に可算集合または有限集合が $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ と可算個あり、これらの中に一つでも可算集合が存在すれば、それらの和集合 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$ も可算集合。

(v) A を可算集合、B を可算集合とすると、A の元と B の元との対全体

$$A\times B=\{(a,b): a\in A, b\in B\}$$

は可算集合。

これらは容易に証明できますから各自で考えてみてください。また有理数の集合 $\mathbb{Q}$ が可算集合であることと (i),(iv) をもちいると 1.7 の例での集合 A は可算集合であることが分かります。

可算集合は次の意味で無限集合の中でもっとも初歩的なものといえます。

- B を無限集合とすると、B はかならず可算部分集合 A を含む。

まず、B から一つ元 b_1 を選びます。B は無限集合ですから $B-\{b_1\}$ は空集合ではありません。よって $B-\{b_1\}$ から元 b_2 を選べます。同様に $B-\{b_1,b_2\}$ も空集合ではありませんから、そこから一つの元 b_3 を選べます。これを繰り返せば、B の元 $b_1,b_2,...,b_n,...$ が選べますから $A=\{b_1,b_2,...,b_n,...\}$ とおけばよいのです。

問題 B を無限集合、C を可算集合（有限集合でもよい）とする。このとき B と $B\cup C$ は同じ濃度をもつ。

次に有理数の集合に無理数全体を付け加えた実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表わすとき、これは可算集合でしょうか？実はこれは可算集合にはなりません。そのことを示すには有名なカントール(Cantor)の対角線論法をもちいます。

実数の集合 $\mathbb{R}$ と開区間 $(0,1)$ は同じ濃度をもちますから、$(0,1)$ が可算集合にならないことをしめせばよい。$(0,1)$ に属する実数 x を10進法展開で

$$x=0.x_1x_2x_3x_4\cdots x_n\cdots(x_n \text{ は } 0 \text{ から } 9 \text{ までの数})$$

の形で表わせます。$(0,1)$ をこのように10進法展開で表わされた数全体の集合 D と同一視したいのですが、ただ問題なのは $0.010000000\cdots=0.009999999\cdots$ のように2通りの表記をもつものが重複して存在することです。しかしこうした数は有理数であり、したがって $(0,1)$ の可算部分集合です。上で述べたように無限集合に可算集合を加えても濃度は変わりませんから $(0,1)$ と D は同じ濃度をもちます。そこで D が可算集合であるとして矛盾を導き出しましょう。D が可算集合であるとして、その元を

$$\begin{array}{lcl}
x_1 & = & 0.x_{11}x_{12}x_{13}\cdots x_{1n}\cdots \\
x_2 & = & 0.x_{21}x_{22}x_{23}\cdots x_{2n}\cdots \\
\vdots & & \vdots \\
x_n & = & 0.x_{n1}x_{n2}x_{n3}\cdots x_{nn}\cdots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

とすべて並べます。そして $y_n(n=1,2,\cdots)$ を $y_n\neq x_{nn}$ となるように、例えば $x_{11}=3$ ならば $y_1=4$, $x_{22}=5$ ならば $y_2=6$, $x_{33}=0$ ならば $y_3=1$ となるように選んで、$y=0.y_1y_2y_3\cdots y_n\cdots$ とおいて y を定めます。y は D の元なのである n があって $y=x_n$. ところが、すべての $n=1,2,3,\cdots$ に対して y と x_n の小数点以下 n 桁目が異なりますから $y\neq x_n$. これは矛盾です。以上のことから $\mathbb{R}$ の濃度は可算集合の濃度ではない。$\mathbb{R}$ と同じ濃度をもつ集合は<u>連続体濃度</u>をもつといいます。

2.6 連続体仮説

$\mathbb{R}$ の部分集合で、可算集合でもなく、かつ連続体濃度をもたない集合は存在するのでしょうか？そのような集合は存在しないと主張するのが「連続体仮説」です。では連続体仮説は正しいのでしょうか？

2.7 類別について

学校の一つの学年の生徒を3年A組, 3年B組,...とクラス分けするように、集合 X の元をいくつかのクラス（グループ）に分けることを考えましょう。例えば、$A_0 = \{3$ で割り切れる整数全体$\}$,$A_1 = \{3$ で割って 1 余る整数全体$\}$, $A_2 = \{3$ で割って 2 余る整数全体$\}$ とおくと、整数の集合 $\mathbb{Z}$ の各元は A_0, A_1, A_2 のどれかの 1 つだけ属する。すなわち

$$\mathbb{Z} = A_0 \cup A_1 \cup A_2, \quad A_0 \cap A_1 = A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_0 = \emptyset.$$

が成り立ちます。このように X をクラスに分けるとき、X の全ての元がどれかのクラスに属し、かつ 2 つの異なるクラスには属しない、という条件がみたされているとき、このクラス分けを X の類別といいます。

$\mathbb{Z}$ の元のクラス B_p を、素数 p で割り切れる整数全体とすると B_p (p は全ての素数を動く) は $\mathbb{Z}$ の類別ではありません。たとえば 6 は 2 でも 3 でも割り切れて B_2, B_3 の両方に属するからです。

2.8 同値関係

集合 X の類別の話の続きです。類別によって定まるある一つのクラス A に X の2元 a, b が一緒に含まれているかどうかということについてちょっと考えてみましょう。

(1) 私が a が A に含まれていることを知っていたとします。他の誰かが A の中に a が含まれているのを知りたがったら、私はその人に「a は A に含まれているよ」といってあげることができます。

(2) つぎに a が A に含まれているならば b も A に含まれることがわかったとします。もし他の誰かが A の中に b が含まれているのを知ったとき、私はその人に「じゃ a も A に含まれているよ」といってあげることができます。

(3) 私が a が A に含まれているならば b も A に含まれることを知っていて、他の誰かが b が A に含まれているならば c も A に含まれることを知っていたら、二人の知識を合わせて a が A に含まれているならば c も A に含まれることを知ります。

X の2元 a, b が同じクラスに含まれるということを 2 項間の関係とみましょう。a, b が同じクラスに含まれることを記号 $a \sim b$ で表わすことにします。すると上の (1),(2),(3) は、この記号を用いて次のようにかくことができるでしょう。

(1) $a \sim a$（反射律）

(2) $a \sim b$ ならば $b \sim a$ （対称律）

(3) $a \sim b$ かつ $b \sim c$ ならば $a \sim c$ （推移律）

今度は、逆に X の任意の2つの元 a と b の間に「関係」$a \sim b$ が成り立つか否かが定まっているとします。たとえば

A. $X = \mathbb{Z}$（整数の集合）とし、a から b をひいた数が 3 で割り切れるとき、$a \sim b$ であらわす。

B. $X = \mathbb{R}$（実数の集合）とし、a から b をひいた数が整数のとき、$a \sim b$ であらわす。

C. $X = \mathbb{R}$（実数の集合）とし、a が b 以下のとき、$a \sim b$ であらわす。

D. $X = \{$日本人の姓$\}$ とし、a が b と共通の文字を含むとき、$a \sim b$ であらわす。

このような関係は上の(1),(2),(3) をみたすでしょうか？

例 A. $a - a = 0$ は 3 の倍数(3×0) なので反射律は成立。$a - b$ が 3 の倍数ならば $b - a = -(a - b)$ も 3 の倍数なので対称律も成立。$a - b$ が 3 の倍数、$b - c$ が 3 の倍数ならば $a - c = (a - b) + (b - c)$ も 3 の倍数なので推移律も成立。同様に例 B も反射律・対称律・推移律が成立。

例 C. a は a 以上なので反射律は成立。$a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば $a \leq c$ なので対称律も成立。しかし $2 \leq 3$ であっても $3 \leq 2$ は正しくないので対称律は成立しない。

例 D. もちろん a と a とは同じ文字からなるから反射律は成立。a が b と共通の文字を含むとき、b が a と共通の文字を含むので対称律も成立。しかし「山田」と「田村」は同じ文字を含み、「田村」と「村上」は同じ文字を含むが「山田」と「村上」は同じ文字を含まないので推移律は成立しない。

2.9 同値関係による集合の類別

集合 X に「関係」$\sim$ が与えられて、上で述べた反射律・対称律・推移律がすべて成立していたとしましょう。すると2つの元 a, b について $a \sim b$ であれば、a, b は同じクラスに属し、さらに1つのクラスでは、その中のどの2つの元 a, b をとってきても、かならず $a \sim b$ が成り立つように X を類別することができます。

1つのクラスに a が属していたら、そのクラスは $\{b \in X : a \sim b\}$ と表わされる。

クラス $\{b \in X : a \sim b\}$ を a を含む同値類といいます。記号で $[a]$ で表わしましょう。

2.10 代表

集合 X の類別が与えられたとき、その各クラスから１つづつ元を選び出すことを考えましょう。ちょうど学校の3年A組, 3年B組,...の各クラスから代表として学級委員を１名選ぶようなものです。

例えば、整数の集合 $\mathbb{Z}$ に次の関係を導入しましょう。

$$a, b \in \mathbb{Z} \text{ に対して } a \sim b \Leftrightarrow \ a - b \text{ が } 5 \text{ で割り切れる。}$$

このとき関係 $\sim$ は同値関係であり、整数 a と b が同値、すなわち $a \sim b$ であることと a を 5 で割った余りと b を 5 で割った余りが等しくなることと同じです。したがって、$\sim$ により5つの同値類 C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 が得られます。ここで

$$C_n \text{ は } 5 \text{ で割ると } n \text{ 余る整数全体}$$

で、たとえば $C_1 = \{1, -4, 6, -9, 11, -14, 16, -19, \cdots\}$ となります。

集合に同値関係が与えられたとき,その同値類から一つずつ元を選んだものをこの同値関係に関する<u>代表系</u>といいます。たとえば C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 から一つずつ元を選んだ $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ は上の例における同値関係に関する代表系です。同値類から代表として選ばれた元をその同値類の<u>代表元</u>といいます。代表系の選び方は一通りではなく、他にも $\{25, -19, -3, 103, 259\}$ も一つの代表系になります。

集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられたとき、それによる同値類を１つの元と見て、それらを集めた集合を $X/\sim$ とかきます。上の例では $\mathbb{Z}/\sim = \{C_0, C_1, C_2, C_3, C_4\}$ です。X の各元 a に、a を含む同値類 $[a]$ を対応させる写像 $p : X \to X/\sim$ は全射になります。もう一度上の例に戻ると

$$p(0) = C_0,\ p(1) = C_1,\ p(2) = C_2,\ p(3) = C_3,\ p(4) = C_4,\ p(5) = C_0,\ p(6) = C_1.$$

「写像」の言葉で言い換えれば、同値類から代表系を選ぶということは、写像 $f : X/\sim \to X$ で f と p との合成 $p \circ f : X/\sim \to X/\sim$ が $X/\sim$ 上の恒等写像になるものを見つけることになります。

念のためにもう一つだけ例を挙げておきます。L を xy 平面内の原点 O を通る一つの直線とします。平面内の２点間の関係を

$$P \sim Q \Leftrightarrow \text{P=Q であるか、} P \neq Q \text{ なら } P, Q \text{ を通る直線は } L \text{ に平行}$$

で定めます。このとき $\sim$ は同値関係で、点 P の同値類 $[P]$ は点 P を通り、L に平行な直線上にある点の集合となります。L 以外の原点を通る直線 R をとります。すると R は L と平行な直線と必ず一点でのみ交わります。そこで $[P]$ の代表元 $f(P)$ として R 上にある点を選んで代表系をつくることができます。

2.11　選択公理

同値関係 $\sim$ が与えられた集合 X に対して、その同値類の集合 $f : X/\sim$ からかならず代表系を選ぶことができる主張するのが選択公理(Axiom of Choice)です。

$I = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ を半開区間とします。I に次のような関係を導入します。

$$x, y \in I \text{ に対して } x \sim y \Leftrightarrow \; x - y \text{ は有理数。}$$

このとき関係 $\sim$ は同値関係です。その同値類の集合を $J = I/\sim$ で表わしましょう。

ここで J は非可算無限集合であることをみましょう。まず各同値類は可算集合です。$[x]$ を 1 つの同値類としましょう。すると $[x] = \{x + r : r$ は有理数で $0 \leq x + r \leq 1\}$. $[x]$ から有理数の集合(可算集合) $\mathbb{Q}$ への単射

$$[x] = \{x + r : r \text{ は有理数で } 0 \leq x + r \leq 1\} \to \mathbb{Q} : x + r \mapsto r$$

が存在するので $[x]$ は可算集合。だから、もし J が可算集合ならば、I は可算個の可算集合の和集合となり、I も可算集合。これは矛盾です。

このような状況の下で J から代表系を選ぶことができるでしょうか？J は非可算集合なので、まず 1 つの同値類を選び、そこから一つ元をとりだし、次に他の同値類を選び、そこから一つ元をとりだし、さらに 3 つ目の同値類を選び、そこから一つ元をとりだし、...という具合にはけっしてできません。そこで代表元の具体的素性を知るのはあきらめて、とにかく「選択公理」から代表系 P が得られたとしましょう。

2.12　非可測集合の存在

I を xy 平面の x 軸上にあるとします。今、x 軸上の集合 A に対して、A の各点 x を端点として、y 軸に平行で長さ 1 の線分を x の真上に引きます。こうした線分をすべて集めてできる図形を $\tilde{A}$ で表わすことにしましょう。

$$\tilde{A} = \{(x, y) : x \in A, 0 \leq y \leq 1\}$$

上で得られた P に対して $\tilde{P}$ は可測集合でない、すなわち面積をもたない集合です。

もし $\tilde{P}$ が面積をもつとすれば次のようにして矛盾が生じます。半開区間 $[0, 1)$ に含まれる有理数全体は可算集合ですから、それらを $r_1, r_2, r_3, ..., r_i, ...$ としましょう。P_i として P の点 x を r_i だけ正の方向にずらして、さらにもしそれが 1 より大きかったら　1 を引いて得られる点の集合とします。すなわち

$$P_i = \{x + r_i : x \in P, x + r_i \leq 1\} \cup \{x + r_i - 1 : x \in P, x + r_i > 1\}.$$

とくに $P_0 = P$. 同じ P_i に属する2点 x, y に対して $x - y$ は有理数になることに注意してください。$\tilde{P}_i$ は集合 P を r_i だけ右に平方移動して、さらに 1 を超えた部分を 1 だけ左に平行移動したものですから $\tilde{P}_i$ の面積 $= \tilde{P}$ の面積 です。

- I の点 x はどれかの P_i に属します: P は同値関係 $\sim$ についての代表系ですから、x を含む同値類の代表元 $y \in P$ をとると $r = x - y$ は有理数です。$x, y \in I$ より、$-1 < r < 1$. $r \geq 0$ のときは、ある i があって $r = r_i$. よって $x \in P_i$. $r < 0$ のときは $r + 1 \in I$ ゆえ、やはりある i があって $r_i = r + 1$. このとき $x = y + r_i - 1$. よって $x \in P_i$.

- $i \neq j$ のときは $P_i \cap P_j = \emptyset$: もし $P_i \cap P_j$ が空でなければ、ある $x \in P, y \in P$ が存在して、

$$\begin{array}{ll} (1)\ x + r_i = y + r_j, & (2)\ x + r_i - 1 = y + r_j, \\ (3)\ x + r_i = y + r_j - 1, & (4)\ x + r_i - 1 = y + r_j - 1 \end{array}$$

  のどれかが成り立ちます。いずれにしても $x - y$ は有理数。すなわち $x \sim y$ で、P は各同値類の代表元の集まりでしたから $x = y$. すると $0 \leq r_i, r_j < 1$ より、(1) の場合だけ可能で $r_i = r_j$. すなわち $i = j$. これは矛盾。

以上から

$$I = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i, \quad P_i \cap P_j = \emptyset \quad (i \neq j \text{ のとき})$$

よって

$$\tilde{I} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{P}_i, \quad \tilde{P}_i \cap \tilde{P}_j = \emptyset \quad (i \neq j \text{ のとき})$$

もし $\tilde{P}$ の面積が正の値ならば、$\tilde{I}$ は互いに交わらない同じ面積をもつ無限個の集合の和ですから、I の面積は無限大になるはずです。一方、もし $\tilde{P}$ の面積が 0 ならば、$\tilde{I}$ は面積 0 をもつ集合の和ですから、I の面積は 0 になるはずです(塵がなければ積もらない)。いずれにせよ $\tilde{I}$ の面積 1 に矛盾します。[3]

このようにルベーグの意味でも面積を持たない集合を構成するのに選択公理をもちいましたが、では選択公理そのものは証明しなくてよいのでしょうか？各クラスから一つずつ代表を選ぶことができるなんて当たり前すぎて証明することの必要性さえ見落としがちです。しかし、もしクラスが非可算無限個あれば前にもいったように一つのクラスから代表を選んだら次のクラスに取りかかるという作業は不可能です。もちろん場合によっては、さきほどの直線族の同値類の例のように代表元を選ぶ手段が存在するものもあります。しかしあらゆる場合でもそんな都合の良い代表元を選ぶ手段があるのでしょうか？–この「選択公理」は「連続体仮説」とともに数学において深刻な問題を投げかけたのです。結論を乱暴に言ってしまうと「選択公理が正しいこと」は証明できません。しかも一方で「選択公理が正しくないこと」も証明できません。同様なことは「連続体仮説」についてもいえます。すなわち「証明できないこと」が証明されているというちょっと不思議な現象が生じているのです。そして選択公理を仮定しないと次のことがいえます。

[3]実はまだ「可測集合」、すなわち面積や体積をもつ集合とは何かについて詳しく議論していません。この証明も現段階では直感的なイメージを頼りに読んでください。

● 選択公理と要請しない数学の体系においては平面（あるいは空間）内のすべての集合は（ルベーグの意味での）面積（あるいは体積）をもつ(Solovey[5]).

また選択公理を仮定しても面積について成立してほしい **1.5** の (1),(2) と**1.8** の(4) という性質を要求するかぎり **2.12** の非可測集合の存在は免れえぬことからルベーグの面積や体積の理論は、数学基礎論の立場から見ても究極の奥深さをもっているといえます。

2.13 バナッハ・タルスキのパラドックス

非可測集合の存在は次のような非常に奇妙な現象を引き起こします。次の定理の主張は本来のバナッハ・タルスキの定理の特殊な場合です。定理の証明は参考文献の[4],[6]にあります。

バナッハ・タルスキ(Banach-Tarski)の定理 r を正数とし、K, L ををそれぞれ3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の半径 r および $2r$ の球体とする。このとき K の分割 $K = A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n$, ($i \neq j$ のとき $A_i \cap A_j = \emptyset$) と $\mathbb{R}^3$ の運動 $h_1, ..., h_n$ [4]が存在して $L = h_1(A_1) \cup h_2(A_2) \cup \cdots h_n(A_n)$.

ユークリッド空間の運動で体積は保存されるので、もし非可測集合が存在しなければこんなことは起こるはずがありません。しかし非可測集合が存在すればこのようなこともあり得るのです。途中の経過はともかく半径 1 の球体を組み替えることによって半径 2 の球体がつくれ、半径 2 の球体を組み替えることによって半径 4 の球体がつくれるというぐあいに繰り返していくと途方もなく大きい球体をつくることができます。もしこれが金でできた球体なら大金儲けができるのですが、逆のプロセスをたどると半径 1 の球体からいくらでも小さい半径の球体がつくれるので、金がこれ以上分解できない陽子や電子などに分解するのに矛盾するなど、このような定理は物理の世界を破綻させてしまいます。

日常生活に必要な「ものの大きさを測る」ということから出発して、最後には我々の日常を支配する物理法則に照らし合わせるとありうべからぬ観念的な世界の話になってしまいました。しかしこの世界も人間の健全な思考のなかで誕生したものです。バナッハ・タルスキの定理が成り立つような世界を排除するのではなく、そうした不思議な世界をも産み出すほどにどこまで遠くへ及んでいく人間の精神について思いをはせてみてください。無限の世界は人間の心の中に宿っています。

[4]空間内の運動とは、平行移動、回転移動および平面に関する折り返しの有限個の合成で得られる変換

3　複素力学系

20世紀後半におけるコンピュータの発達により高速の演算処理が可能になったおかげで、それまで誰も目にしたことがないような複雑な図形が次々と発見されました。「フラクタル図形」と呼ばれるそうした図形の中にはその面積や体積を測ることがとても困難で、現在でも面積がゼロなのかそれとも正の値なのかさえわかっていないものがあります。

3.1　複素数

複素数は代数方程式

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

(とりあえず $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ は実数としておきます) が解を持つように数の世界を広げていくことにより生まれました。2乗すると -1 になるような一つの「数」i（これを虚数単位と云います）を想像して、複素数は

$$z = x + iy \quad (x,\, y \text{ は実数})$$

の形で表わされます。複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表わします。複素数における四則演算は
(加法) $(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$
(乗法) $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
ここで x_1, y_1, x_2, y_2 は実数です。除法を記述するためにまず $z = x + iy$ の共役複素数を

$$\bar{z} = x - iy$$

で定義します。このとき

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

を z の絶対値と云います。0 でない複素数 z の逆数は $1/z = \bar{z}/|z|^2$ で表わされ、したがって $x_2 + iy_2 \neq 0$ のとき

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(-x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

となります。複素数の乗法について交換法則 $z_1 z_2 = z_2 z_1$ が成り立ちます。複素数について大切なことは次の「代数学の基本定理」と呼ばれるものです。

代数方程式 (3.1) は($a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ が複素数のときも) かならず複素数の範囲で解をもつ。

3.2　複素（数）平面

図のように xy 数平面の点 (x,y) に複素数 $z=x+iy$ を代表させたものを複素平面といいます（高校の授業では「複素数平面」と呼んでいると思いますが、ここでは「複素平面」と呼ぶことにします。）x 軸はその上の点はすべて実数を表すので実軸と呼びます。y 軸上の点は iy の形の数、すなわち純虚数をあらわし、y 軸を虚軸といいます。0 は原点に対応し、複素数 z の絶対値 $|z|$ は z を表わす点の原点からの距離となります。

0 でない複素数 z に対して $r=|z|$ とおき、さらに z を終点にもつ位置ベクトルが実軸となす角度を θ とします。θ は z の偏角といいますが、これを $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲に限定しないほうが便利で、したがって偏角は 2π の整数倍の差を無視して一意的に定まるといういい方をします。このとき z は

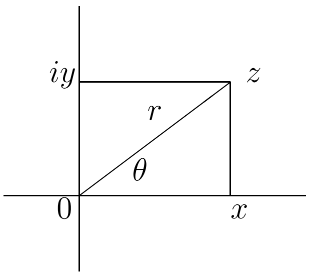
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{3.2}$$

とも表わされます。これを z の極座標による表示といいます。$r=0$ のときは(3.2)の θ に何を代入しても複素数 0 を表わすとします。複素数の積に関しては極座標表示の方が幾何学的なイメージが掴みやすいでしょう:

$$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)).$$

この等式を導き出すには三角関数の加法公式を使ってください。この式を繰り返し使うと、複素数のべき乗についての次のド・モアブル(de Moivre)の公式が得られます。

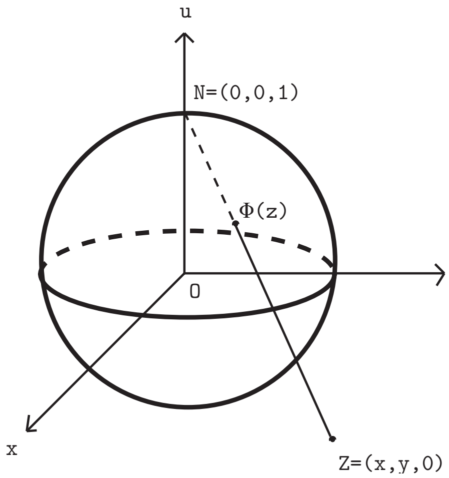
$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$



3.3　リーマン球面

複素数を変数にもつ関数、例えば有理関数 $f(z)=(z+1)/(z^2+1)$ を考えると 分母が 0 になる $z=\pm i$ は除くべきでしょう。しかし関数がどこで定義されるかをいちいちチェックするのも面倒なことです。そこで逆に有理関数が分母が 0 なる点で取るべき値というのを複素数の集合につけ加えることを考えます。

3次元空間内に原点を中心とした半径 1 の球面を $\Sigma = \{(x, y, u) : x^2 + y^2 + u^2 = 1\}$ とおき、北極に位置する点 $N = (0, 0, 1)$ を考えます。xy 平面上の点 $Z = (x, y, 0)$ と N を線分で結べば、N 以外にこの線分は Σ とただ 1 点のみで交わります。Z が複素数 $z = x + iy$ を表わしているとみて交点を $\Phi(z)$ とおくと、Φ は複素平面から、N を除いた球面 Σ への 1 対1対応を与えます。こうして N 以外の球面 Σ 上の各点が 1 つの複素数に対応すると考えたとき Σ をリーマン球面といいます。



点 N を複素平面の無限の彼方にあるのだと解釈して、これを無限遠点とよび、改めて記号 ∞ で表わします。さてもう一度関数 $f(z) = (z + 1)/(z^2 + 1)$ を考えましょう。z が i または $-i$ に近づくとき、球面上で点 $\Phi(f(z))$ は点 N に収束します。そこで f の $z = \pm i$ での値は ∞ であると約束するのです。また z が原点から遠くへ離れていくとき $\Phi(z)$ は N に近づき、$f(z)$ は 0 に収束します。そこで $f(\infty) = 0$ と定めます。$f(z)$ をもっと一般の有理関数とします:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m z^n + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0}. \tag{3.1}$$

ここで $a_n \neq 0, b_m \neq 0$. ただし $P(z), Q(z)$ を因数分解して $P(z) = P_1(z)R(z)$, $Q(z) = Q_1(z)R(z)$ と共通の 1 次以上の因子 $R(z)$ が括りだせるときは $P_1(z), Q_1(z)$ を新たに $P(z)$, $Q(z)$ とおくことにより、$f(z)$ はすべての点で $\frac{0}{0}$ の形にならないものとしておきます。このとき $Q(z) = 0$ となる点 z で $f(z) = \infty$, さらに

$$f(\infty) = \begin{cases} \infty & (n > m \text{ のとき}) \\ a_n/b_m & (n = m \text{ のとき}) \\ 0 & (n < m \text{ のとき}) \end{cases}$$

となります。

3.4 関数の反復合成

有理関数((3,1) のように表される関数) $f(z)$ を考えます。ただし $f(x)$ はリーマン球面からリーマン球面への写像と見ます。f を n 回合成したもの $\underbrace{f(f(\cdots(f}_{n \text{ 回}}(z))\cdots))$ を $f^n(z)$ で表わします（$f(z)$ の n 乗と混同しないこと。）たとえば $f(z) = z^2$ のときは

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 \\ f^2(z) &= z^4 \\ f^3(z) &= z^8 \\ &\vdots \\ f^n(z) &= z^{2^n} \end{aligned}$$

となります。関数の反復合成の応用例として代数方程式の近似解をもとめるニュートン法があります。例えば、ここでは実関数を考えますが、$x^3 - 3$ の解である $\sqrt[3]{3}$ の近似値を求めるため、$y = f(x) = x^3 - 3$ のグラフを考えます。一つの数 a をとります。点 $(a, f(a))$ におけるグラフの接線の方程式は $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. この接線と x 軸との交点は $a - f(a)/f'(a)$. これを a の関数と思って $F(a) = a - f(a)/f'(a)$ とおきます。$\sqrt[3]{3}$ に近そうな点 a を選べば（ここが少々問題なのですが）反復合成 $F^n(a)$ が $\sqrt[3]{3}$ に近づくことが図を描くことによって理解できるでしょう。今の場合 $F(a) = (2a^2 + 3)/(3a^2)$ となって $a = 2$ とすると

n	a_n の値
$a_1 = F(2)$	1.58333333...
$a_2 = F(a_1)$	1.4544475222...
$a_3 = F(a_2)$	1.442351584...
$a_4 = F(a_3)$	1.442249578...
$\vdots$	$\vdots$
$\sqrt[3]{3}$	1.442249579...

この方法は代数方程式の複素数解を求めるにも有効です。

3.5 複素力学系

$f(z)$ を一つの有理関数とするとき、$z_0 \in \mathbb{C}$ に対して、反復合成 $f^n(z_0)$ はどのような挙動をするのかを調べましょう。こうしたことを研究する数学の分野を<u>複素力学系</u>といいます。z_0 を反復合成列 $\{f^n(z_0)\}$ に対する初期値といいます。

例. $f(z)=z^2$ のとき、$f^n(z)=z^{2^n}$ であるから

$$\begin{array}{ll} |z_0|<1 \text{ のとき} & |f^n(z_0)|=|z_0|^{2^n}\to 0(n\to+\infty) \\ |z_0|>1 \text{ のとき} & |f^n(z_0)|=|z_0|^{2^n}\to \infty(n\to+\infty) \\ |z_0|=1 \text{ のとき} & |f^n(z_0)|=|z_0|^{2^n}= 1(n\to+\infty) \end{array}$$

となります。絶対値が 1 ではない複素数の集合 $F_f=\{z\in\mathbb{C}:|z|\neq 1\}$ を $f(z)=z^2$ のファトゥー(Fatou)集合、絶対値が 1 である複素数の集合 $J_f=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ を $f(z)=z^2$ のジュリア(Fatou)集合といいます。$z\in F_f$ ならば、z に十分近い点 w に対して$\{f^n(z)\}$ と $\{f^n(w)\}$ は同じような振るまいをする（どちらも 0 または ∞ に収束する。）すなわち、ファトゥー集合の点は初期値に関して安定的です。逆に$z\in J_f$ ならば、z にいくらでも近くにある点 w で $\{f^n(z)\}$ と $\{f^n(w)\}$ とは全く異なる振るまうものがあるので、ジュリア集合は初期値に関して非安定的です。

一般の有理関数 $f(z)$ に対しても、反復合成 $f^n(z)$ $(n=1,2,...)$ が初期値の近傍でどのように振るまうかで、そのファトゥー集合 F_f とジュリア集合 J_f が定義できます。リーマン球面 Σ からジュリア集合を除いた残りがファトゥー集合です。$z_0\in F_f$ ならば、反復合成列 $\{f^n(z)\}$ の部分列 $\{f^{n_k}(z)\}$ に対して $f^{n_k}(z_0)$ がある値 w に収束すれば z_0 に十分近い点 z_1 に対して $f^{n_k}(z_1)$ は w の近くにある値（w も含めて）に収束します。このことを数学的に厳密に述べるのは大変なので、別の仕方でこれらの集合を定義しましょう。

3.6 ジュリア集合

関数 $f(z)=z^2+i$ を考えましょう。この関数に関して

$$f(-i)=-1+i,\ f(-1+i)=-i$$

成り立つので z_0 を $-i$ または $-1+i$ とすると、この点は f の 2 回合成で自分自身に戻ってきます。一般の有理関数 $f(z)$ に対して、リーマン球面の点 z_0 はある自然数 n があって $f^n(z_0)=z_0$ となるとき f の周期点といいます。そして $f^n(z_0)=z_0$ をみたす最小の正整数 n を z_0 の周期と呼びます。$-i$ または $-1+i$ は $f(z)=z^2+i$ の周期 2 の周期点ということになります。

再び $f(z)=z^2+i$ とすると

$$f((-1+i)/\sqrt{2})=0,\ f(0)=-i$$

となり、$z_0=(-1+i)/\sqrt{2}$ のときは $f^2(z_0)$ が、$z_0=0$ のときは $f(z_0)$ が $f(z)$ の周期点になります。このように有理関数 $f(z)$ に対して、ある非負整数 n が存在して $f^n(z_0)$ が $f(z)$ の周期点になるとき、z_0 は $f(z)$ の前周期点といいます。

有理関数 $f(z)$ の周期 n の周期点 z_0 について定義より $f^n(z_0)=z_0$. $f^n(z)$ の z_0 での微分係数 $(f^n)'(z_0)$を考えます。

注 複素数関数の微分はまだ習っていないでしょうが、多項式の場合、$f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ に対しては $f'(z)=na_nz^{n-1}+(n-1)a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1$ となり、有理関数 $f(z)=P(z)/Q(z)$ ($P(z), Q(z)$ は多項式）に対しては $f'(z)=(P'(z)Q(z)-P(z)Q'(z))/Q(z)^2$ となり、実数関数と同じです。複素数の関数の微分の意味は「複素解析学」、「複素関数論」といったタイトルの本を読むなどして調べてください。

$|(f^n)'(z_0)|<1$ であるか、$|(f^n)'(z_0)|=1$ であるか、$|(f^n)'(z_0)|>1$ であるかにしたがって z_0 を吸引的、中立的、反発的周期点といいます。吸引的周期点はかならず f のファトゥー集合に含まれます。また反発的周期点はかならず f のジュリア集合に含まれます。中立的周期点は扱いが難しく、ファトゥー集合に含まれるものとジュリア集合に含まるものが存在します。反発的周期点をもちいてジュリア集合は次のように特徴づけられます。

ジュリア集合 J_f はそのいくらでも近くに反発的周期点が存在するようなリーマン球面の点の集合である。

逆に z_0 がファトゥー集合 F_f の点ならば、ある $r>0$ が存在して z_0 中心半径 r の円板の中には反発的周期点は存在しません。また反発的周期点 z_0 を一つとってくると、その前周期点もジュリア集合の点になります。じっさいジュリア集合の形は一つの反発的周期点の前周期点をリーマン球面内にプロットしていくことでわかります。例えば $f(z)=z^2+i$ のとき $-i$ は周期２の周期点でした。

$$f^2(z)=(z^2+i)^2+i=z^4+2iz^2-1,\quad (f^2)'(z)=4z^3+4iz$$

で $|(f^2)'(-i)|=4\sqrt{2}>1$ なので $-i$ は反発的周期点です。$-i$ の前周期点をもとめるには各自然数 n について方程式 $f^n(z)=i$ を解けばよろしい。まず $f(z)=-i$ すなわち $z^2+2i=0$ を解いて、その解 $\pm(1-i)$ をプロットします。次に $z_0=1-i$, $z_0=-1+i$ それぞれに対して $f(z)=z_0$ を解いて、その２つの解をプロットします。この作業を続けていけばやがてジュリア集合の形が浮かび上がってくるのですが、やはりそれは大変骨の折れる作業です。下に H.-O. Peitgen, P.H. Richter著 Beauty of Fractals, Springer-Verlag, 1986 の p.14 に掲載されているジュリア集合の図を掲げておきます。黒でしめされた複雑な図形がジュリア集合です。

3.7 マンデルブロート集合

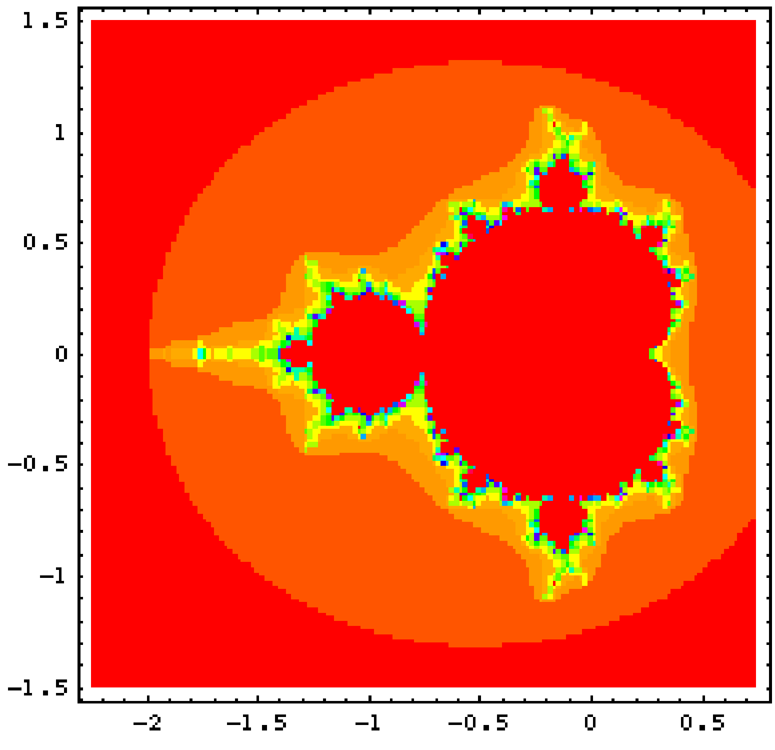
上に掲載したジュリア集合は 2 次多項式 z^2+c のもので、例えば図12は $c=i$ の場合のジュリア集合です。こんな簡単な多項式でもジュリア集合の形は複雑です。上の図で 8,9,10,12 に描かれているジュリア集合と 11,13 に描かれているジュリア集合になにか違いがないでしょうか？

図 8,9,10,12 ではジュリア集合はひとつながりになっています。ただし「ひとつながりになっている」ということを、ここではジュリア集合のかってな 2 点 z と w を選んだとき、z からジュリア集合の中だけを経由して w に到達できるとか、あるいは複素平面内にジュリア集合の点を通らない閉じた曲線（円周のような）を、その内側にも外側にもジュリア集合の点を含むように決して描くことができないというイメージで理解してください。図 11,13 ではジュリア集合の点のかたまりが離れ小島のように点在しています。

マンデルブロート(Mandelbrot)集合とは $c\in\mathbb{C}$ に対して、多項式 $f_c(z)=z^2+c$ の反復合成の性質をコントロールする空間で

$$\mathbb{M}=\{c\in\mathbb{C}: f_c \text{ のジュリア集合 } J_{f_c} \text{ がひとつながりになっている}\}$$

で定義されます。この集合の全貌は下の図のようになります。



この集合がマンデルブロートによって発見されたのは1979年のことですから、数学の歴史においてはつい最近のことです。ちなみにマンデルブロート(Benoit Mandelbrot)はフランス人なので「マンデルブロー集合」と呼ぶ人もいますが、彼の活動拠点は米国のIBMにあったので、「マンデルブロート集合」と呼ばれることもあり、ここでは後者を選びます。

この紙面上ではお見せできないのですがマンデルブロート集合 $\mathbb{M}$ の境界の一部を拡大することによって、$\mathbb{M}$ がどんなに複雑な形状をしているのかがわかります。まるで万華鏡を覗くような楽しみがあります。何時間もながめても飽きないぐらいです。

複素平面の点 c がマンデルブロート集合 $\mathbb{M}$ に属しているかどうかは、次の判定法でわかります: $c \in \mathbb{C}$ が $\mathbb{M}$ の外部の点であるための必要十分条件は、ある非負整数 n が存在して $|f_c^n(0)| > 2.$（[8] の10章参照）これを利用してマンデルブロート集合の概形をコンピュータグラフィックを描きます。以下に掲載したのは数式処理ソフト「Mathematica」によるマンデルブロート集合を描写するための簡単なプログラムです。

```
f[x_, y_, m_] := Block[{ z =  x + I*y,  c = x + I*y,  i = 0},
    While[ Abs[z] < 2.0 && i < m, z = z*z + c; i++ ]; Return[i]
]

DensityPlot[ f[x, y, 60], {x, -2.25, 0.75}, {y, -1.5, 1.5},
    PlotPoints -> 150,
      Mesh ->False,
          ColorFunction -> Hue
]
```

このプログラムの前半は $c = x + iy$ の値をあたえたとき、$|(f_c)^n(0)| > 2$ となる n の値を返す関数を定義しています。ただし c がマンデルブロート集合に属すれば、`While`文は無限ループに陥ってしますので、反復を行なう回数の制限を `m` で与えます。すなわち $|(f_c)^n(0)| > 2$ となる `m` 以下の $\mathtt{n} < \mathtt{m}$ がなければプログラムはここでストップして、値 `m` を返します。

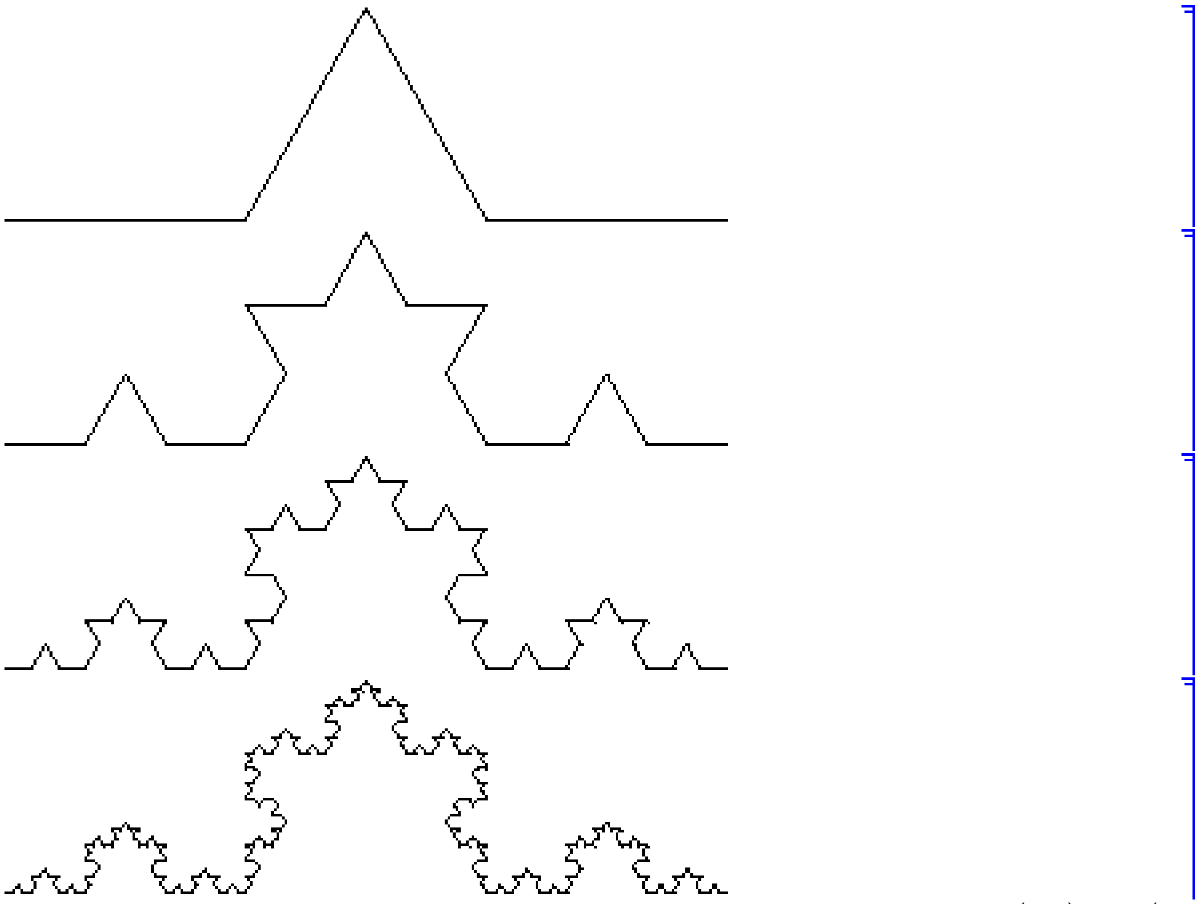
プログラムの後半では `x`, `y` が $-2.25 < \mathtt{x} < 0.75$, $-1.5 < \mathtt{y} < 1.5$ を動くときの、関数 `f[x,y,60]` の密度グラフを作成します。グラフィックに関するオプショナルな指定については Mathematica についての本を参照してください。

3.8 ハウスドルフ次元とフラクタル図形

平面上描かれた円や関数 $y = f(x)$ のグラフは、その上の１点のまわりをズームアップしていくとだんだんまっすぐになって直線のように見えてきます。言い換えると、これらの曲線にはその上の各点で接線が引くことができます。逆にその上のどの点を選んでも接線を引けない曲線が存在します。コッホ曲線がその例です。

まず平面に長さ1の閉区間を描きます。次にこの区間を3等分して、真ん中の区間を底辺にもつ正三角形を描き、その後で底辺の線分を消します(下の最初の図)。こうしてできた曲線は長さ1/3 の4つの区間からなりますが、それぞれに対してまた同じ作業を繰り返します。今度は長さ 1/9 の16個の区間からなる曲線を得ます。以下この作業を無限に繰り返してできるのがコッホ曲線で、下の図にしめす図の極限として現われます。

定規の目盛り0 の位置にコッホ曲線の１点を合わせ、その点を固定したまま、目盛り 1mm, 2mm,3mm, ... の位置がコッホ曲線上に来るように順に定規を動かすと定規は振幅し続けます。同じことは（実際には無理ですが）0.9mm, 0.8mm, ... と 0 に近づく目盛りをコッホ曲線上に合わせることでも観察できます。これはコッホ曲線にはいたるところ接線が引けないことを意味しています。



コッホ曲線の作図法から次のことがわかります。今コッホ曲線は xy 平面の点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に端

点をもつとし、記号 K で表わします。

$$F_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/3 \\ y/3 \end{pmatrix}$$

を原点を中心とした倍率 1/3 の縮小写像、以下相似写像を

$$F_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x/3 \\ y/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x/3 \\ y/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/3 \\ y/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で定めます。F_2 は F_1 に原点のまわりの $60°$ の回転と x 軸方向への長さ 1/3 の平行移動を合成したもの、F_3 は F_1 に原点のまわりの $120°$ の回転と x 軸方向への長さ 2/3 の平行移動を合成したもの、F_4 は F_1 に x 軸方向へ長さ 2/3 の平行移動を合成したものです。このときコッホ曲線は

$$K = F_1(K) \cup F_2(K) \cup F_3(K) \cup F_4(K)$$

という、全体を1/3 に縮めたものを4つはめ込むと元の曲線に戻るという「自己相似性」とよばれる性質をもちます。

コッホ曲線を描くための第1段階の曲線は $[0,1]$閉区間なので長さ 1. 第2段階の曲線は長さ 1/3 の閉区間4つからなり、全体の長さ 4/3. 第2段階の曲線は長さ 1/9 の閉区間16個からなり、全体の長さ 16/9. これを続けると n 番目の段階の曲線は長さ $1/3^n$ の閉区間 4^n 個からなり、全体の長さ $(4/3)^n$. よって $n \to \infty$ とすることにより、コッホ曲線の長さは無限大であることがわかります。自己相似性よりコッホ曲線上のどんなに微小な区間をとってもその長さは無限大になります。

今度はコッホ曲線の面積を求めましょう。上で見た通り n 番目の段階の曲線は長さ $1/3^n$ の閉区間 4^n 個からなります。それらの区間を底辺とする1辺の長さ $1/3^n$ の正方形を描くと、コッホ曲線はこれらの正方形に覆われてしまいます。各正方形の面積は $1/3^{2n}$ なので

$$K \text{ の面積} < \frac{4^n}{3^{2n}} = \frac{4^n}{9^n}.$$

したがって $n \to \infty$ とすることにより K の面積は 0 となります。コッホ曲線の長さおよび面積を測るのに計算した数列をもう一度書きます。

$$4^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (\text{長さを測る場合}), \qquad 4^n \times \left(\frac{1}{3^2}\right)^n \quad (\text{面積を測る場合}).$$

これらを一般化して

$$4^n \times \left(\frac{1}{3^\alpha}\right)^n \tag{3.3}$$

を考えましょう。これはコッホ曲線を近似する第 n 段階の曲線を構成する各区間の長さを α 乗して足しあわせたもので、上で云ったように $\alpha = 1$ のときが長さを測ることに、$\alpha = 2$ のときが面積に測ることに対応します。(3.3) において $n \to \infty$ とするとき、その極限は $\alpha < \log 4/\log 3$ のときは無限大、$\alpha > \log 4/\log 3$ のときは 0, そして $\alpha = \log 4/\log 3$ のときは 1 になります。極限値が ∞ から 0 に変わる境目の α, すなわち

$$\log 4/\log 3 = 1.261859507...$$

をコッホ曲線 K のハウスドルフ次元と呼びます。

このハウスドルフ(Hausdorff)次元というのは図形の複雑さを測る一つの量です。ハウスドルフ次元の詳しい定義についてはここでは述べませんが（例えば [7] を参照してください)、有限な長さをもつ曲線については、そのハウスドルフ次元は 1, 多角形や円の内部のハウスドルフ次元は 2 であるなど、普通にに抱く次元のイメージの一般化になっています。

平面上の集合 A の点 $P = (x_0, y_0)$ で、P を中心としたある半径(> 0) の円板の内部がすべて A に含まれるようなものが存在するとき、A は内点をもつといいます。多角形や円の内部は内点をもちます。内点をもつ平面上の集合のハウスドルフ次元は必ず 2 となります。もし平面上に内点をもたないのにハウスドルフ次元 2 の集合があったとしたら、まったく幅や厚みがないのに多角形や円の内部と同格になるのですから、それはもうよっぽど複雑に入り組んだ図形になっていなければなりません。マンデルブロート集合の境界はすごく複雑な形状を呈しているので、そのハウスドルフ次元は 2 ではないかと予想され、それを証明することが長年の懸案だったのですが、1998年に宍倉光広氏(現・広島大学)によってついに解かれました。

定理. マンデルブロート集合の境界のハウスドルフ次元は 2 である。

さらに宍倉氏は、マンデルブロート集合の境界上にあるほとんどの点 c について $f_c(z) = z^2 + c$ のジュリア集合のハウスドルフ次元が 2 であることも示しています。

面積を測るという問題に戻ると、マンデルブロート集合の境界の面積が 0 であるかどうかはまだわかっていないようです。また特別な場合を除いて有理関数のジュリア集合の面積が(もしそれがリーマン球面と一致していなければ）0 であるかどうかという問題も未解決のままです。代数方程式の近似解を求めるなどの必要性から関数の反復合成を計算する上で、実際にデータとして利用されるのは「近似値」であることが多い、例えば $\sqrt{3}$ を初期値にする場合、数値計算で入力されるのはその近似値 1.7320508... です。そして反復合成の際に入力するデータも実際の値の近似値に過ぎません。だから反復合成列が、初期値や途中で入力されるデータについて非安定的ならば、数値実験の結果への信頼度は低くなります。非安定的な点の存在は避けられないとしても、それらがなす集合はほとんど無視できるぐらい非常に小さいものであってほ

しいという希望があります。なぜなら、もしそうなら数多くの初期条件の下での実験を繰り返せば、それらの結果のほとんどのものはある程度信頼できるものとなるからです。ジュリア集合の面積が 0 であることをしめすことに意義がこうした点にあります。

複素関数の反復合成の性質を研究する分野を「複素力学系」と呼ぶということでしたが、ここでは有理関数の場合しか扱いませんでした。現在ではもっと広いクラスの関数（(多変数も含めて）超越整関数や有理形関数）の複素力学系が研究されています。本格的に勉強したい方のために [9] をあげておきます。

参考文献

[1] 小泉袈裟勝, 単位の今昔、（続）単位の今昔, 日本規格協会、1992

[2] Royden, H., Real Analysis(3rd Edition), Prentice Hall, 1988.

[3] 志賀浩二, 無限のなかの数学、岩波新書405、1995.

[4] 志賀浩二, 無限からの光芒、日本評論社、1988.

[5] Solovay, R., A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue-measurable, Ann. of Math., **92** (1970), 1–56.

[6] 砂田利一, バナッハ・タルスキーのパラドックス（岩波科学ライブラリー）、岩波書店, 1997.

[7] K. J. ファルコナー, フラクタル集合の幾何学, 近代科学社.

[8] 志賀啓成, 複素解析学II, 培風館, 1999.

[9] 上田哲生、谷口雅彦、諸沢俊介, 複素力学系序説、培風館.