複素力学系入門 (その１)

中西敏浩

1　有理関数の反復合成

1.1　有理関数

この講義では 1 複素変数有理関数を考える:

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0},$$

ここで $a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_m \in \mathbb{C}, a_n \neq 0 \neq b_m$, $p(z)$ と $q(z)$ はそれぞれ右辺の分子・分母にある多項式で既約。R の次数 (degree) は次で定義される。

$$\deg(R) = \max\{\deg(p), \deg(q)\} = \max\{n, m\}$$

(1.1.1) 有理関数は Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ からそれ自身への正則写像として特徴づけられる。Riemann 球面 $\overline{\mathbb{C}}$ の距離を球面距離 $d(\cdot, \cdot)$ で考えるとき $R : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ は連続である。

ここでは

$$R^n = \underbrace{R \circ R \circ \cdots \circ R}_{n\text{ 回}} \quad R \text{ の } n \text{ 回反復合成}$$

とおく。$R(z)$ の n 乗を対応させる関数ではないことに注意する。したがって $R(z) = z^m$ のときは $R^n(z) = z^{m^n}$ である。

1.2　Fatou 集合と Julia 集合

例.　$R(z) = z^2$ とすると、$R^n(z) = z^{2^n}$. $R^n(z)$ の振るまいは z が単位円周の外にあるか内にあるか、あるいは円周上にあるかで大きな違いがある。

- $|z| < 1$ のとき $R^n(z)$ は定値関数 0 に局所一様収束。
- $|z| > 1$ のとき $R^n(z)$ は定値関数 ∞ に局所一様収束。
- $|z| = 1$ のとき $R^n(z)$ は単位円周上を動く。

この $|z| > 1$, $|z| < 1$ における R^n のふるまいを一般性をもつように定式化して

定義. 有理関数 R の Fatou 集合 $F(R)$ は次によって定義される。Julia 集合 $J(R)$ は $\overline{\mathbb{C}} - F(R)$ のことである。

$$F(R) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \ z \text{ のある開近傍 } U \text{ において } \{R^n|_U\} \text{ は正規族 }\}$$

例 1. $R(z) = z^m, m \in \mathbb{Z} - \{0, 1 - 1\}$ のとき $J(R) = \{z : |z| = 1\}$ (単位円周).

例 2. $R(z) = z^2 - 2$ のとき $J(R) = [-2, 2] = \{x : |x| \leq 2\}$.

例 3. 複雑な Julia 集合の図. $R(z) = z^2 + c$ ここで $c \approx -0.12256177 + 0.74486177$ は $c^3 + 2c^2 + c + 1 = 0$ の根である。下の図の黒い領域の境界が $J(R)$.

(すでに正規族を知っていたら) 例 1 の方は R^n は $\{|z| > 1\}$ で定値関数 ∞ に、$\{|z| < 1\}$ で定値関数 0 に局所一様収束するので察しがつくかもしれない。これらの例での Julia 集合は円周や線分であるが一般にはすごく複雑な様相を呈する。どうして Julia 集合がこうなるかを知るためにも、まず正規族について説明しなければならない。

1.3 正規族

定義. 局所コンパクト・ハウスドルフ空間 X から距離空間 (Y, d_Y) の間の写像の族 $\mathcal{F}$ が**正規族**であるとは、$\mathcal{F}$ の任意の部分列 $\{f_n\}$ が局所一様収束する部分列を含むときにいう。$\mathcal{F}$ が正規族であるための判定法としてよく知られているのは

Ascoli の定理 $\mathcal{F}$ が正規族である $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ はすべての $x \in X$ において同等連続かつ $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ は Y の相対コンパクト集合。

注: $\mathcal{F}$ が $x \in X$ において**同等連続** $\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $\epsilon > 0$ に対して x の近傍 U が存在し

$$x' \in U, f \in \mathcal{F} \Rightarrow d_Y(f(x'), f(x)) < \epsilon.$$

以下、$\mathcal{F}$ は領域 $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ から $\overline{\mathbb{C}}$ への正則写像 (= 有理形関数) の族とする。
(1.3.1) $\overline{\mathbb{C}}$ はコンパクトなので、各コンパクト集合 $K \subset D$ 上 $\mathcal{F}$ が同等連続であること $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ は正規族。
(1.3.2) もし $D \subset \mathbb{C}$ かつ $\mathcal{F}$ が局所一様有界な正則関数族であれば、Cauchy の積分定理の比較的簡単な応用でコンパクト部分集合上で $\mathcal{F}$ の同等連続性がいえるので $\mathcal{F}$ は正規族になる。

最も強力な正規族判定法の一つとして

定理 1.1. (Montel の定理) 3 点集合 $\{a, b, c\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ が存在して

$$\text{すべての } f \in \mathcal{F} \text{ に対して } f(D) \subset \overline{\mathbb{C}} - \{a, b, c\} \Rightarrow \ \mathcal{F} \text{ は正規族}$$

略証. $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ とする。各 $z \in D$ ついて z を中心とする円板 V, U ($\bar{V} \subset U \subset D$) をとる。$V$ で一様収束する $\{f_n\}$ の部分列が存在することをいう。$\pi : \mathbb{D} = \{|z| < 1\} \to \overline{\mathbb{C}} - \{a, b, c\}$ を普遍被覆とする。$\tilde{f}_n : U \to \mathbb{D}$ を f_n の持ち上げとする。$\tilde{f}_n$ は一様有界ゆえ、V 上一様収束する部分列をふくむ。以下、それを改めて $\tilde{f}_n$ とする。

残念ながら、この段階では $f_n = \pi \circ \tilde{f}_n$ が一様収束すると <u>結論できない</u>。$\mathbb{D}$ 上の普遍被覆群の作用に関する基本集合 F を a, b, c の近傍 U_a, U_b, U_c を互いに disjoint にとるとき $F - \pi^{-1}(U_a \cap U_b \cap U_c)$ が $\mathbb{D}$ で相対コンパクトとなるものに、そして $\tilde{f}_n(z) \in F$ となるように選んでおいて上の議論に戻る。$\tilde{f}_n(z)$ が $\mathbb{D}$ の内点に収束する場合と、ある $\pi^{-1}(U_j), j \in \{a, b, c\}$, の中から $\mathbb{D}$ の境界に収束する場合に分ける。正則写像による Poincaré 距離の縮小性 (Schwarz-Pick の定理) をもちいて、前者ならば, ある $\mathbb{D}$ のコンパクト部分集合 W があって $\tilde{f}_n(V) \subset W$ となることと $\pi|_W$ の一様連続性より $f_n = \pi \circ \tilde{f}_n$ は V で一様収束。後者の場合は、たとえば $j = a$ とすると $f_n|_V$ は (球面距離に関して) 一様に定値関数 a に収束する。詳細は [Shig] の 9.3 節参照。 □

1.4 Riemann-Hurwitz の公式

R を有理関数、$d = \deg(R)$ とする。$w \in \mathbb{C} - R^{-1}(\infty)$ のまわりでの R の Taylor 展開

(1)
$$R(z) = a_0 + a_1(z - w) + a_2(z - 2)^2 + \cdots + a_n(z - w)^n \cdots$$

が $a_1 \neq 0$ をみたすとき w を R の**通常点** (regular point) という。$a_1 = 0$ のときは w を R の**特異点** (critical point) という。$a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$, $a_k \neq 0$ ならば R は w の近傍で k 対 1 写像である。定義より

$$w \text{ が } R \text{ の特異点} \iff R'(w) = 0.$$

$w \in \mathbb{C}$, $R(w) = \infty$ の時は $1/R(z)$ を w で、$w = \infty$, $R(w) \in \mathbb{C}$ の時は $R(1/z)$ を 0 で、$w = f(w) = \infty$ の時は $1/R(1/z)$ を 0 でそれぞれ (1) のように展開して、通常点であるか特異点であるかを定める。

定義. (1) $C(R)$ を R の特異点全体の集合とする。$V(R) := f(C(R))$ の各点を**特異値** (critical value) という。
(2) $z \in \overline{\mathbb{C}}$ のとき $d_z = d - \sharp R^{-1}(z)$ とおく。z が特異値であるための必要十分条件は $d_z > 0$ である。

$V = V(R)$ と書く。$S = \overline{\mathbb{C}} - V$, $\tilde{S} = \overline{\mathbb{C}} - R^{-1}(V)$ とおく。$R : \tilde{S} \to S$ は不分岐 d 重被覆ゆえ Euler 標数について

$$\chi(\tilde{S}) = d\chi(S)$$

の関係が成立する。$n_V = \sharp V(R)$ とおく。$d - d_v$ は $R^{-1}(v)$ の個数であったから $\tilde{S}$ は球面から $\sum_V (d - d_v)$ 個の点を除いたもの。よって上式は

$$2 - \sum_V (d - d_v) = d(2 - n_V)$$

またはこれを書き直して

$$\sum_V d_v = 2d - 2.$$

これらを **Riemann-Hurwitz の公式**という。

補題 1.2. $\deg R = d$ のとき $\sharp C(R) \leq 2d - 2$.

証明. $v \in V$ とするとき $f^{-1}(v)$ に含まれる特異点はすくなくとも値 1 の寄与を d_v に与えるから、$\sharp C(R) \leq \sum_V d_v$ である。後は Riemann-Hurwitz の公式から明らか。 □

2 Julia 集合と Fatou 集合の性質（その１）–例外点

2.1 1 点における同等連続性

R を有理関数とする。定義より
(2.1.1) $F(R)$ は開集合、$J(R)$ は閉集合。
以下 R について了解があるときは $J(R), F(R)$ を単に J, F と記す。Fatou 集合、Julia 集合の性質をさらに調べていこう。

領域 $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ 上の関数族が $z_0 \in D$ で同等連続であるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し、すべての $f \in \mathcal{F}$ について $d(z, z_0) < \delta$ ならば $d(f(z), f(z_0)) < \epsilon$ が成り立つことであった。.

(注) $z_0, f(z_0) \in \mathbb{C}$ $(f \in \mathcal{F})$ のときは球面距離のかわりに Euclid 距離で考えてよい。

$\mathcal{F}$ の元がすべて有理形関数の場合の特別な事情として

定理 2.1. $\mathcal{F}$ の関数はすべて有理形で $\mathcal{F}$ は z_0 で同等連続 $\Longleftrightarrow$ z_0 の開近傍 U が存在して $\mathcal{F}$ は U で正規族.

証明. $\Leftarrow$ は明らか。
$\Rightarrow$ の証明。$z_0 \in \mathbb{C}$ の場合を考える。$\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ とする。$\overline{\mathbb{C}}$ のコンパクト性より部分列に置き換えて $f_n(z_0) \to w_0$ $(n \to \infty)$ としてよい。$w_0 \in \mathbb{C}$ の場合を考える。ある N が存在し $N \leq n$ ならば $|f_n(z_0)| < |w_0| + 1$.

仮定よりある $\delta > 0$ が存在して $f \in \mathcal{F}$, $|z - z_0| < \delta$ ならば $|f(z) - f(z_0)| < 1$. $r = \delta/2$ とおくと円板 $U = \{z : |z - z_0| < r\}$ 上

$$|f_n(z)| < |f_n(z_0)| + 1 < |w_0| + 2.$$

すなわち $\{f_n\}$ は U 上一様有界。よって (1.3.2) より $\{f_n\}$ は正規族。よって U 上局所一様収束する部分列を含む。 $\square$

この定理より、Fatou 集合の新しい特徴づけを得る。
(2.1.2) $F(R) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \{R^n\}$ は z で同等連続 $\}$

定義. R を有理関数とする。集合 $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ が (R の作用に関して、あるいは単に R に関して) **完全不変** (completely invariant) $\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ $R(E) = E = R^{-1}(E)$.

有理関数 $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ は連続かつ開写像である。よって (2.1.2) より次のことがすぐにわかる。

定理 2.2. 有理関数 R に対して F (したがって J) は完全不変である。

2.2 例外点

補題 2.3. R は有理関数で $\deg(R) \geq 2$ とする。E が R の完全不変有限集合ならば $\sharp E \leq 2$

証明. $k = \sharp E < \infty$ とする。 $R(E) = E$, すなわち R は E 上の置換を与えるから、ある正整数 p が存在して、すべての $z \in E$ に対して $R^p(z) = z$.

$f = R^p$ とおく。$d := \deg(f) = [\deg(R)]^p \geq 2$ である。$z \in E$ のとき $f^{-1}(z) \subset E$ かつ $w \in E - \{z\}$ ならば $f(w) = w \neq z$. すなわち $f^{-1}(z) = \{z\}$. これから $z \in E$ ならば $z \in V(R)$ かつ $d_z = d - 1$. $V^* = V - E$ とおくと Riemann-Hurwitz の公式より

$$2 - k - \sum_{V^*}(d - d_v) = d(2 - k - n_{V^*}),$$

ただし $n_{V^*} = \sharp V^*$. これを変形して

$$(d-1)(k-2) = \sum_{V^*}(d - d_v) - d \cdot n_{V^*}.$$

$V^* = \emptyset$ ならば、右辺は 0, そうでないときは $d - d_v \leq d - 1$ ゆえ右辺は負。$d \geq 2$ ゆえ $k \leq 2$. □

R は有理関数で $\deg(R) \geq 2$ とする。$z, w \in \overline{\mathbb{C}}$ に対する関係 $\sim$ を次のように定める。

$z \sim w \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ ある非負整数が n, m が存在して $R^n(z) = R^m(w)$.

$[z] = \{w \in \overline{\mathbb{C}} : w \sim z\}$ とおく。$[z]$ は完全不変である。

定義. $\sharp[z] < \infty$, すなわち $[z]$ が有限集合であるとき z は R の**例外点** (exceptional point) という。$E(R)$ を R の例外点全体の集合とする。

補題 2.4. $E(R)$ は完全不変でかつ $\sharp E(R) \leq 2$.

証明. $E(R)$ の完全不変性は $[z]$ の完全不変性から明らか。もし 3 つの例外点の同値類 $[z_1], [z_2], [z_3]$ があれば、それらに属する点全体は 3 点以上を含む完全不変有限集合となり補題 2.3 に反する。よって $E(R)$ は高々 2 つの例外点の同値類に含まれる点の集合であり有限集合である。よって再び補題 2.3 より $\sharp E(R) \leq 2$. □

$E(R)$ は次のケースに別れる:
(i) $E(R) = \emptyset$.
(ii) $E(R) = \{\zeta\}$.
(iii) $E(R) = \{\zeta_1, \zeta_2\}$ かつ $\zeta_1 \not\sim \zeta_2$.
(iv) $E(R) = \{\zeta_1, \zeta_2\}$ かつ $\zeta_1 \sim \zeta_2$.

次のことは容易にわかる。
(ii) の場合 $W(z) = 1/(z-\zeta)$ とおくと $W \circ R \circ W^{-1}$ は z の多項式、(iii) の場合 $W(z) = (z-\zeta_1)/(z-\zeta_2)$ とおくと、ある $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ があって $W \circ R \circ W^{-1}(z) = az^d$, (iv) の場合、同じ W に対して $W \circ R \circ W^{-1}(z) = az^{-d}$.

(ii) の場合 $\infty \in F(W \circ R \circ W^{-1}) = W(F(R))$,
(iii),(iv) の場合 $0, \infty \in F(W \circ R \circ W^{-1}) = W(F(R))$ はすぐにわかる。したがって

補題 2.5. $\deg R \geq 2$ のとき、例外点は Fatou 集合に属する: $E(R) \subset F(R)$.

補題 2.6. $\deg(R) \geq 2$ のとき $J(R) \neq \emptyset$.

証明. $J = \emptyset$ と仮定する。$\{R^n\}$ は $\overline{\mathbb{C}}$ 上である有理形関数 f に一様収束する部分列 $\{f_\nu = R^{n_\nu}\}$ を含む。f は定値関数ではない。なぜなら、もし f が値 a しかとらなければ $\overline{\mathbb{C}} = F$ なので ν が十分大きいとき $f_\nu(\overline{\mathbb{C}})$ は a の $\pi/2$-近傍に含まれる。これは f_ν の全射性に反する。

$V = V(f) \cup \bigcup_{\nu=1}^{\infty} V(f_\nu)$ は可算集合ゆえ $w_0 \in \mathbb{C} - (V \cup f^{-1}(\infty))$ が選べる。一次分数変換による共役に置き換えることで $w_0 = 0$ としてよい。$f^{-1}(0) = \{z_1, ..., z_d\}$ ($d = \deg(f)$) とする。$\rho > 0$ を十分小さく $D_i = \{z : d(z, z_i) < \rho\}$ $(i = 1, ..., d)$ が条件 (i) $\overline{D_i} \cap \overline{D_j} = \emptyset$ $(i \neq j)$, (ii) 各 $\overline{D}_i$ は $f^{-1}(\infty)$ を含まない、を充たすようにとる。$\Omega = \overline{\mathbb{C}} - \cup_{j=1}^d D_j$ とおくと $\delta := \inf\{d(f(z), 0) : z \in \Omega\} > 0$. f_ν は f に一様収束しているから、ある N があって $\nu \geq N$ ならば $\overline{\mathbb{C}}$ のすべての点で $d(f_\nu(z), f(z)) < \delta/2$. よって

$$d(f_\nu(z), 0) \geq d(f(z), 0) - d(f(z), f_\nu(z)) > \frac{\delta}{2} > 0 \qquad (z \in \overline{\Omega},\ \nu \geq N).$$

すなわち $\nu \geq N$ ならば f_ν は $\overline{\Omega}$ に zero をもたない。N をもっと大きくとると、各 D_j の境界上で $|f_\nu(z) - f(z)| < |f(z)|$ であるから Rouché の定理より、f_ν も D_j で zero を一つしかとらない。よって

$$d = \deg(f_\nu) = \deg(R^{n_\nu}) = [\deg(R)]^{n_\nu} \qquad (\nu > N).$$

$\nu \to +\infty$ のとき右辺 $\to +\infty$. これは矛盾。 $\square$

補題 2.7. $\deg(R) \geq 2$ のとき $J(R)$ は無限集合。

証明. $\sharp J < \infty$ とする。上の補題 より J に含まれる点 z が存在する。J の完全不変性 (Thorem 2.2) より $[z] \in J$. よって $\sharp[z] < \infty$ なので z は例外点 $\in F(R)$ (補題 2.5). これは矛盾。 $\square$

$\deg(R) \geq 2$ のとき Julia 集合は次のように一言で特徴づけられる。

定理 2.8. $\deg(R) \geq 2$ とする。E が R の完全不変な閉集合で $\sharp E \geq 3$ ならば $E \supset J$. したがっては 3 点を含む完全不変閉集合の中で最小。

証明. $D = \overline{\mathbb{C}} - E$ は完全不変な開集合。よって $R^n(D) = D (n = 1, 2, ...)$. 仮定より $\{R^n|_D\}$ は正規族 (Montel の定理 1.1) で $D \subset F$. 言い換えると $E \supset J$. $\square$

補題 2.9. $\deg(R) \geq 2$ とする。$F \neq \emptyset$ ならば J は内点をもたない。

証明. $F \neq \emptyset$ とする。J の内点集合 $D = \mathrm{Int}(J)$ が空集合であることをしめしたい。$R : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ は連続かつ開写像。よって D は完全不変な開集合。F が空でない開集合だから $\overline{\mathbb{C}} - D = F \cup \partial J$ は 3 点を含む閉集合。よって上の定理より $J \subset F \cup \partial J$. $J \cap F = \emptyset$ だから $J \subset \partial J$. よって $D = \emptyset$. $\square$

$F(R) = \emptyset$ という現象は実際ありうる。$F(R) = \emptyset$ となる有理関数の例で複素力学系の歴史の初期に得られたものとして

S. Lattès の例

$$R(z) = \frac{(z^2+1)^2}{4z(z^2-1)}$$

がある。(C. R. Acad. Sci. Paris **166** (1918), 26–28.) 関連して次の定理がある。

定理 2.10. ([Bea, 定理 9.4.4]) R のすべての特異点が前周期的 (preperiodic) ならば $F(R) = \emptyset$.

ここで $z \in \overline{\mathbb{C}}$ が**前周期的**であるとは、ある R の周期点 (定義は 3 章を見よ) w に対して $z \sim w$ となることである。 この定理より、次の関数の Fatou 集合は空であることが

わかる。

$$R(z) = \frac{(z-2)^2}{z^2}$$

3 Julia 集合 と Fatou 集合の性質（その 2）–周期点と Julia 集合

3.1 Julia 集合は完全集合

前章で $\deg(R) \geq 2$ ならば、その Julia 集合 J は無限個の点を含む閉集合で、さらに $F \neq \emptyset$ ならば内点をもたないことをしめした。閉集合 $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ が**完全集合** (perfect set) であるとは、各 $z \in E$ が $E - \{z\}$ の集積点であるときにいう (問題 3.1 参照)。t この章の最初の目標は次の定理の証明である。

定理 3.1. $\deg(R) \geq 2$ とする。$F \neq \emptyset$ ならば J は完全集合である。

いくつかの準備の後にこの定理を証明する。$\deg R \geq 2$ を常に仮定する。

定理 3.2. U を開集合で $U \cap J \neq \emptyset$ とする。このとき、ある $m \geq 0$ が存在して $J \subset \bigcup_{k=0}^{m} R^k(U)$.

証明. J がコンパクトだから $J \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k(U)$ を示せばよい。$V = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k(U)$ とおくと $R^p(V) \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} R^{k+p}(U) \subset V$ $(p = 1, 2, ...)$. $V \cap J \supset U \cap J \neq \emptyset$ ゆえ $\{R^p(V)\}$ は正規族でないから Montel の定理より $E = \overline{\mathbb{C}} - V$ とおくと $\sharp(E) \leq 2$. $R(V) \subset V$ より $R^{-1}(E) \subset E$. よって E の点は例外点となり、$E \subset F$. したがって $J \cap (\overline{\mathbb{C}} - V) = \emptyset$. すなわち $J \subset V$. □

$z \in \overline{\mathbb{C}}$ に対して $O^+(z) = \{z, R(z), R^2(z), ...\}$ (z の R-軌道) とおく。

定義. $O^+(z)$ が有限集合になるとき、言換えれば、ある $n \geq 1$ に対して

$$R^n(z) = z \tag{3.1}$$

であるとき z を R の**周期点**という。(3.1) をみたす最小の n を z の**周期**という。$n = \sharp(O^+(z))$. $n = 1$ のときは特に z を R の**不動点** (あるいは**固定点**) という。

補題 3.3. $a \in J$ のとき $a \in O^+(b)$ かつ $b \notin O^+(a)$ となる点 b が存在する。

証明. a が周期点でないときは b として $R^{-1}(a)$ のかってな点を選べばよい。a を周期 n の周期点とする。$S = R^n$ とおく。$S^{-1}(a) = \{a\}$ ならば $[a] = \{a\}$, すなわ

ち a は例外点。$a \in F(S) = F(R)$ となるから矛盾。よって $b \in S^{-1}(a) - \{a\}$ が存在する。$a = S(b) = R^n(b) \Rightarrow a \in O^+(b)$. 一方 $b = R^p(a) \in O^+(a)$ $(p \geq 1)$ ならば $a = S(b) = R^{n+p}(a) = R^p(R^n(a)) = R^p(a) = b$ となり矛盾。すなわち $b \notin O^+(a)$ □

定理 3.1 の証明. $a \in J$ とする。a の任意の開近傍 U に a 以外の J の点が含まれることをいえばよい。b を補題 3.3 の条件をみたす点とする。 $a \in O^+(b)$ より b も J の点。定理 3.1 より、ある n が存在して $b \in R^n(U)$. よって $c \in U$ で $R^n(c) = b$ となる点がある。c も J の点。 $b \notin O^+(a)$ より $c \neq a$. □

3.2 周期点の分類

$O^+(p)$ を R の周期 N の軌道とする (このとき $O^+(p)$ を**サイクル**と呼ぶ)。$p_m = R^m(p)$ $(m = 1, ..., N)$ とおくと

$$(R^N)'(p_m) = R'(R^{N-1}(p_m))R'(R^{N-2}(p_m)) \cdots R'(p_m).$$

ここで $\{R^{N-1}(p_m), R^{N-2}(p_m), ..., p_m\} = \{p_1, p_2, ..., p_N\}$ なので、$(R^N)'(p_m)$ は m に依らないことがわかる。

定義. (1) $\lambda = (R^N)'(p)$ を $O^+(p)$ の**固有値**という。
(2) サイクル $O^+(p)$ は
 (i) $0 < |\lambda| < 1$ のとき、**吸引的** (attracting) であるという。
 (ii) $\lambda = 0$ のとき、**超吸引的** (superattracting) であるという。
 (iii) $|\lambda| > 1$ のとき、**反発的** (repelling) であるという。
 (iv) $|\lambda| = 1$ のとき、**中立的** (neutral)(あるいは**無関心** (indifferent)) であるという。
$O^+(p)$ が吸引的サイクルのとき p は**吸引的周期点**という。他の場合も同様。次章でしめすように、(超) 吸引的周期点 $\in F(R)$, 反発的周期点 $\in J(R)$.

補題 3.4. (逆写像の存在、モノドロミー定理の特別な場合) R を有理関数で $D(\subset \overline{\mathbb{C}})$ は単連結領域で $D \cap V(R) = \emptyset$ とする。[*1] このとき $d \in D$ と $c \in R^{-1}(d)$ に対して D 上定義される有理形関数 S で $R(S(z)) = z$ $(z \in D)$ かつ $S(d) = c$ となるものが存在する。

証明は省略。

[*1] $V(R)$ は R の特異値の集合であった。

補題 3.5. $\deg(R) \geq 2$ とする。このとき

$$J \subset \overline{\{\text{periodic points of } R\}}.$$

次の定理は次章以下で準備の後、第 6 章で証明を与える。

補題 3.6. $\deg(R) \geq 2$ とする。このとき吸引的サイクルと中立的サイクル は有限個。

上の二つの補題と J が完全集合であることより次の定理を得る。

定理 3.7. $\deg(R) \geq 2$ とする。このとき

$$J = \overline{\{\text{repelling periodic points of } R\}}.$$

補題 3.5 の証明. R^2 の特異値は有限集合で、J は完全集合だから $\mathcal{C} = V(R^2) \cup \{\infty\}$ とおくとき $K = J - \mathcal{C}$ が R の周期点の集合の閉包に含まれることをいえばよい。ある $a \in K$ があって a のある近傍 $U = \{z : |z - a| < r\}$ は R の周期点を含まないとして矛盾を導く。r は十分小さくとって U が R^2 の特異値を含まないとしてよい。

$\deg(R^2) \geq 4$ より $(R^2)^{-1}(a)$ は 3 点 b_1, b_2, b_3 を含む. 補題 3.4 より U 上の R^2 の逆写像 S_i $(i = 1, 2, 3)$ で $S_i(a) = b_i$ となるものが存在する。$V_i = S_i(U)$ とおく。r をさらに小さくとって V_1, V_2, V_3 の閉包は互いに交わらないと仮定してよい。よって

$$m := \min\{d(\overline{V_1}, \overline{V_2}), d(\overline{V_2}, \overline{V_3}), d(\overline{V_3}, \overline{V_1})\} > 0. \tag{1}$$

$z \in U$ に対して $g_z \in \mathbf{M\ddot{o}b}$ を $g_z^{-1}(0) = S_1(z), g_z^{-1}(\infty) = S_2(z), g_z^{-1}(1) = S_3(z)$ となるように選ぶ:

$$g_z(w) = \frac{(w - S_1(z))(S_3(z) - S_2(z))}{(w - S_2(z))(S_3(z) - S_1(z))}.$$

すると (1) と問題 1.12 より $\{g_z^{-1}\}$ は一様に Lipschitz 連続、すなわち $z \in U$ に依らない $M > 0$ が存在して

$$d(g_z^{-1}(w), g_z^{-1}(\zeta)) \leq M d(w, \zeta).$$

ここで

$$f_n(z) = g_z(R^n(z)) = \frac{(R^n(z) - S_1(z))(S_3(z) - S_2(z))}{(R^n(z) - S_2(z))(S_3(z) - S_1(z))}$$

とおく。すると $z \in U$ ならば $f_n(z) \neq 0$. なぜなら $f_n(z) = 0$ とすると $R^n(z) = S_1(z)$. よって $R^{n+2}(z) = z$ となり U が R の周期点を含まないことに矛盾。同様に $f_n(z) \neq 1$, $f_n(z) \neq \infty$. したがって $f_n(U) \cap \{0, 1, \infty\} = \emptyset$ であり Montel の定理より $\{f_n\}$ は正規族。したがって適当な部分列で考えるとコンパクト部分集合 $K \subset U$ と任意の正数 ϵ に対してある N があって $n, m \geq N, z \in K$ ならば $d(f_n(z), f_m(z)) < \epsilon/M$. このとき

$$d(R^n(z), R^m(z)) = d(g_z^{-1}(f_n(z)), g_z^{-1}(f_m(z))) \leq Md(f_n(z), f_m(z)) < \epsilon.$$

だから R^n は K 上一様収束する。したがって $\{R^n|_U\}$ は正規族。これは $a \in J$ の仮定に反する。 $\square$

4 吸引的周期点

4.1 線形化可能性

定義. $f(z)$ は ζ の近傍で定義された正則関数で $f(\zeta)=\zeta$ をみたすとする。ζ の近傍で定義された正則関数 $g(z)$ で $g(\zeta)=\zeta, g'(\zeta)=1$ さらに

$$g(f(z)) = f'(\zeta)g(z)$$

をみたすものが存在するとき、f は ζ において**線形化可能** (linearizable) であるという。

定理 4.1. $f(z)$ は ζ の近傍で定義された正則関数で $f(\zeta)=\zeta$ をみたすとする。もし $\lambda = f'(\zeta)$ が $0<|\lambda|<1$ または $1<|\lambda|$ をみたせば、f は ζ において**線形化可能** (linearizable) である。

証明. $\zeta=0$ として考える。$1<|\lambda|$ のときは f の逆写像 $f^{-1}(z)$ で以下と同じ議論をすればよいから $0<|\lambda|<1$ として話を進める。$|\lambda|<\alpha<1$ となる数を選ぶ。$f(z)/z$ の連続性より $r>0$ を十分小さくとれば $z \in U = \{z : |z|<r\}$ に対して

(1) $$|f(z)| \le \alpha|z|.$$

U 上で $f(z)=\lambda z[1+\Phi(z)]$ とおくと $\Phi(0)=0$. 正数 M を U 上で $|\Phi(z)|<M|z|$ であるようにとる。(1) より $z\in U$ ならば $|f^m(z)| \le \alpha^m|z| < |z|$ だから、すべての正整数 m に対して $f^m(z) \in U$ であり

(2) $$|\Phi(f^m(z))| \le M\alpha^m|z| \le M\alpha^m r.$$

一方で $z \in U$ ならば

$$f^{n+1}(z) = f(f^n(z)) = \lambda f^n(z)[1+\Phi(f^n(z))].$$

帰納的に

$$\frac{f^{n+1}(z)}{\lambda^{n+1}} = z\prod_{m=0}^{n}[1+\Phi(f^m(z))].$$

$\sum_{m=0}^{\infty} M\alpha^n r$ は収束するから、この積は U 上 $g(z) = z\prod_{m=0}^{\infty}[1+\Phi(f^m(z))]$ に一様収束し、$g(z)$ は U 上で正則である [Ahl, pp.189–191]. 表示から $g(0)=0, g'(0)=1$ がわかり、

$$g(f(z)) = f(z)\prod_{m=1}^{\infty}[1+\Phi(f^m(z))] = \frac{f(z)}{z[1+\Phi(z)]}\cdot g(z) = \lambda g(z).$$

したがって $f(z)$ は 0 で線形化可能。 $\square$

上の定理より次のことがわかる。後半の主張については問題 4.2 も参照のこと。

系 4.2. R を有理関数とする。z が R の吸引的周期点ならば $z \in F(R)$, z が R の反発的周期点ならば $z \in J(R)$ である。

定理 4.3.(Böttcher) $f(z)$ は ζ の近傍で正則で、そこで

$$f(z) = \zeta + b_0(z-\zeta)^q + b_1(z-\zeta)^{q+1} + \cdots \qquad (b_0 \neq 0, q \geq 2)$$

の展開をもつとする。このとき ζ の近傍 D で定義された正則関数 $g(z)$ で
(a) $g(\zeta) = \zeta$, $g'(\zeta) = 1$ かつ
(b) $gfg^{-1}(z) = \zeta + (z-\zeta)^q$ $(z \in D)$
となるものが存在する。

上の定理を証明するためにまず簡単な補題を用意する。

補題 4.4. $n \geq 2$, $W = \{w : |w-1| < 1/2\}$ とおく。z の n-乗根の W 上の分枝 $z^{1/n}$ を $z=1$ で値 1 をとるように選んでおく。このとき

$$|z^{1/n} - 1| < \frac{2|z-1|}{n} < \frac{1}{n}, \qquad z \in W.$$

証明. $z \in W$ とする。1 から z を結ぶ有向線分 C 上で $z^{1/n}$ の微分を積分して

$$|z^{1/n} - 1| = \left| \int_C \frac{z^{-1+1/n}}{n} dz \right| \leq \frac{1}{n} \int_C |z|^{(1-n)/n} |dz| < \frac{2|z-1|}{n}$$

ここで $|z| > 1/2$, $(1-n)/n < 0$ を用いた。 $\square$

定理 *4.3* の証明. $\zeta = 0$ として考える。λ を $\lambda^{q-1} = b_0$ となるように選び $\varphi(z) = \lambda z$ とおく。f の代わりに $\varphi f \varphi^{-1}$ を考えることによって $b_0 = 1$ としてよい。よって $z = 0$ の近傍で

$$f(z) = z^q + b_1 z^{q+1} + \cdots = z^q(1 + h(z)). \tag{3}$$

ここで $h(z)$ は正則で $h(0)=0$. したがって $R>0$ を十分小さくとるとある $K>0$ があって

(4) $$|z|<R \text{ のとき } \qquad |h(z)|\le K|z|.$$

$0<\delta<\min\{1/4, R, 1/(2K)\}$ となるようにとり $D=\{z : |z|<\delta\}$ とおく。すると (3) より

$$|f(z)|\le |z|^q(1+|h(z)|)\le |z|\delta^{q-1}(1+K\delta)<\frac{1}{2}|z|.$$

よって $f(D)\subset D$ で、上の計算を繰り返して

(5) $$|f^n(z)\le |z|/2^n. \qquad (z\in D)$$

$n\ge 0, z\in D$ に対して (3) より

$$f^{n+1}(z)=f(f^n(z))=(f^n(z))^q(1+h(f^n(z))).$$

ここで (5) と δ の選び方より

$$|h(f^n(z))|\le K|f^n(z)|\le \frac{K|z|}{2^n}<\frac{1}{2^{n+1}}<\frac{1}{2}.$$

よって $1+h(f^n(z))$ は補題 4.4 の領域 W に含まれる。よって $1+h(f^n(z))$ の q^{n+1}-乗根 (それを $h_{n+1}(z)$ で表わす) で $h_{n+1}(0)=1$ かつ

(6) $$|h_{n+1}(z)-1|<\frac{1}{q^{n+1}}$$

となるものがとれる。とくに $h_1(z)^q=1+h(z)=f(z)z^{-q}$ である。$\sum_{n=1}^{\infty} q^{-n}$ は収束するから (6) より無限乗積

$$g(z)=z\prod_{n=1}^{\infty}h_n(z)$$

は D 上一様収束してそこで正則関数になる。$g(0)=1, g'(0)=1$ は明らか。

$$[h_{n+1}(f(z))]^{q^{n+1}}=1+h(f^{n+1}(z))=[h_{n+2}(z)]^{q^{n+2}}=[(h_{n+2}(z))^q]^{q^{n+1}}.$$

よって (分枝の選び方から)

(7) $$h_{n+1}(f(z))=h_{n+2}(z)^q.$$

したがって

$$g_n(z)=zh_1(z)\cdots h_n(z)$$

とおくと (7) より

$$\begin{aligned} g_n(f(z)) &= f(z)\,[h_2(z)\cdots h_{n+1}(z)]^q \\ &= \frac{f(z)}{z^q h_1(z)^q}\,[zh_1(z)h_2(z)\cdots h_{n+1}(z)]^q \\ &= g_{n+1}(z)^q. \end{aligned}$$

$n\to\infty$ として $g(f(z))=g(z)^q$. □

系 4.5. p を有理関数 R の超吸引的周期点とすると $p\in F(R)$.

4.2 吸引鉢

定義. p を $\deg R\geq 2$ の有理関数 R の (超) 吸引的不動点とする。

$$W(p,R)=\{z\in\overline{\mathbb{C}}:R^n(z)\to p\quad(n\to\infty)\}$$

を p の**吸引鉢** (attractive basin), その p を含む連結成分 $A(p,R)$ を p の**直接吸引鉢** (immediate attractive basin) という。(R に了解があるときは省略して $W(p),A(p)$ と記す) 明らかに

(4.2.1) $W(p)$ (したがって $\partial W(p)$) は R によって完全不変

p の近傍 $U\subset F$ をとると

(4.2.2) $W(p)=\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty}R^{-n}(U)$ よって $W(p)$ は F の開部分集合。

したがって $\partial W(p)\cap W(p)=\emptyset$. よって $z\in\partial W(p)$ とすると、ある部分列 $\{R^{n_j}\}$ があって $R^{n_j}(z)\to q\neq p$. 一方 z のどんな近傍にも $R^n(w)\to p$ となる点 w が含まれるので $\partial W(p)\subset J$. もし $\sharp\partial W(p)\leq 2$ ならば (4.2.1) より $W(p)$ の点は例外点、よって F の点となり矛盾。定理 2.8 より

(4.2.3) $\partial W(p)=J$.

補題 4.6. p を R の周期 N の (超) 吸引的周期点とするとき $A(p,R^N)=A(R(p),R^N)$. (問題 4.1).

定理 4.7. $\deg(R)\geq 2$ とする。このとき R の直接 (超) 吸引鉢 $A(p)$ は R の特異値を少なくとも一つ含む。

証明. p が超吸引的不動点ならば p 自身が特異値になるので、p は超吸引的でないと仮定してよい。また $\infty\in J$ として一般性を失わない。$A(p)\cap V(R)=\emptyset$ として矛盾を導

く。$U \subset A(p)$ を p の単連結近傍とする。補題 3.4 より、U 上で定義された R の逆写像 S_1 で $S_1(p) = p$ をみたすものが存在する。$U_1 = S_1(U)$ とおくと容易にわかるように $U_1 \subset A(p)$. U を U_1 におきかえて同じ議論を繰り返すと U_1 上定義された R の逆写像 S_2 で $S_2(p) = p$ をみたすものが存在する。以下これを続けて p の単連結な近傍 U_k と U_k 上定義された R の逆写像の列 S_k で $U_{k+1} = S_{k+1}(U_k) \subset A(p)$ をみたすものがとれる。

$$Q_k = S_k \circ S_{k-1} \circ \cdots \circ S_1 : U \to U_k \subset A(p)$$

とおくと $Q_k(p) = p$, $R^k \circ Q_k(z) = z$ $(z \in U)$. (4.2.2) より $A(p) \cap J = \emptyset$ ゆえ Montel の定理より $\{Q_k\}$ は正規族であり、U 上の正則関数 Q に局所一様収束する部分列 $\{Q_{k_j}\}$ が存在する。このとき

$$Q'_{k_j}(p) \to Q'(p) \qquad (n \to \infty),$$

一方で

$$Q'_k(p) = \frac{1}{(R^k)'(p)} = \frac{1}{(R'(p))^k} \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

これは矛盾。よって $A(p) \cap V(R) \neq \emptyset$ 。 □

上の定理と同じ方法で、以下のことがしめせる。

定理 4.8. $d = \deg(R) \geq 2$ とする。このとき R の吸引的サイクルと超吸引的サイクルの個数 $\leq 2d-2$

証明. $p_1 = p$, $p_2 = R(p)$,..., $p_N = R^{N-1}(p)$ (以下添え字は $\mod N$ で考える) を (超) 吸引的サイクルとする。$F = R^N$ とおく。$A(p_1, Q), ..., A(p_N, Q)$ のどれかの中に $V(R)$ の点が含まれることをしめす。超吸引サイクルの場合は

$$(R^N)'(p) = R'(p_1)R'(p_2) \cdots R'(p_N) = 0$$

ゆえ (3.2 参照)、ある k に対して $R'(p_k) = 0$. したがって $p_{k+1} \in V(R)$. 以下吸引的サイクルの場合を考える。

$A(p_1, F), ..., A(p_N, F)$ のどれにも $V(R)$ の点が含まれないと仮定する。$U \subset A(p_1, F)$ を p_1 の単連結近傍とする。補題 3.4 より U 上の R の逆写像 S_1 で $S_1(p_1) = p_N = R^{N-1}(p_1)$ をみたすものが存在する。$U_1 = S_1(U) \subset A(p_N, F)$ とおく。以下このプロセスの繰り返しにより p_l の単連結近傍 $U_k \subset A(p_l, F)$ $(k + l \equiv 1 \mod N)$ とその上の R

の逆写像 S_{k+1} で $S_{k+1}(p_l) = p_{l-1}$ で $S_{k+1}(U_k) = U_{k+1}$ をみたすものが存在することがわかる。

$$Q_k = S_{Nk} \circ S_{Nk-1} \circ \cdots \circ S_1 : U \to U_{Nk}$$

について定理 4.7 の証明と同じ議論を繰り返せば矛盾を生ずる。

以上のことから、各 (超) 吸引的サイクル $\{p_1, ..., p_N\}$ に対して $A(p_1, F) \cup \cdots A(p_N, F)$ に含まれる $V(R)$ の点が存在する。したがって補題 1.2 より

$$(\text{吸引的サイクルと超吸引的サイクルの個数}) \leq \sharp V(R) \leq \sharp C(R) \leq 2d - 2.$$

$\square$

5 有理放物的周期点と花びら定理

5.1 局所理論

$f(z)$ を原点 $z=0$ の近傍で定義された正則関数で、0 の近くで

(1) $$f(z)=z+az^{p+1}+a_{p+2}z^{p+2}+\cdots \quad (a\neq 0),$$

の展開をもつとする。$\alpha^p a=1$ をみたす α をもちいて f を $\alpha^{-1}f(\alpha z)$ におきかえて

$$f(z)=z+z^{p+1}+bz^{p+r+1}+\cdots \quad (b\neq 0, r\geq 1)$$

の形にしておく。もし $r<p$ ならば $g(z)=z+\beta z^{r+1}$, $\beta=b/(p-r)$ として $h(z)=gfg^{-1}(z)$ とおくと $z=0$ のある近傍で次の形になる (以下、定数 b は次々と取り換えていく):

(2) $$h(z)=z+z^{p+1}+bz^{p+r+2}+\cdots$$

なぜなら $h(g(z))=g(f(z))$ の高階微分を計算すると $h'(0)=1, h''(0)=\cdots=h^{(p)}(0)=0$. よって

$$h(z)=z+\sum_{m=p+1}^{\infty}A_m z^m.$$

$h(g(z))=g(f(z))$ を展開すると

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=(z+z^{p+1}+bz^{p+r+1}+\cdots)+\beta(z+z^{p+1}+bz^{p+r+1}+\cdots)^{r+1}\\&=z+\beta z^{r+1}+z^{p+1}+\beta(p+1)z^{p+r+1}+\cdots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=(z+\beta z^{r+1})+\sum_{m=p+1}^{\infty}A_m z^m(1+\beta z^r)^m\\&=z+\beta z^{r+1}+A_{p+1}z^{p+1}+A_{p+2}z^{p+2}+\cdots+A_{p+r}z^{p+r}+bz^{p+r+1}+\cdots,\end{aligned}$$

よって $A_{p+1}=1$, $A_{p+2}=\cdots=A_{p+r+1}=0$. よって $h(z)$ は (2) の形になる。この操作を $r<p$ であるかぎり繰り返していくと

$$h(z)=z+z^{p+1}+bz^{2p+1}+\cdots$$

の形の展開を得る。さらに $\gamma^p=-1$ をみたす γ を用いて $h(z)$ を $\gamma^{-1}h(\gamma z)$ でおきかえると

$$h(z)=z-z^{p+1}+bz^{2p+1}+\cdots.$$

以上のことをまとめると

補題 5.1. $f(z)$ は $z=0$ の近傍で正則で (1) の展開をもつとする。このとき 0 の近傍で定義された正則関数 $g(z)$ で $g(0)=0, g'(0)\neq 0$ をみたすものが存在して

$$gfg^{-1}(z) = z - z^{p+1} + bz^{2p+1} + cz^{2p+2} + \cdots, \tag{3}$$

となる。

以下 $f(z)$ は $z=0$ の近傍で定義され (3) の右辺のような展開をもつものとする。$t>0$ として花弁状領域 (petal) を

$$\Pi_k(t) = \left\{ z = re^{i\theta} : r^p < t(1+\cos(p\theta)),\ |\theta - \frac{2k\pi}{p}| < \frac{\pi}{p} \right\}, (k=0,1,...,p-1)$$

で定める。

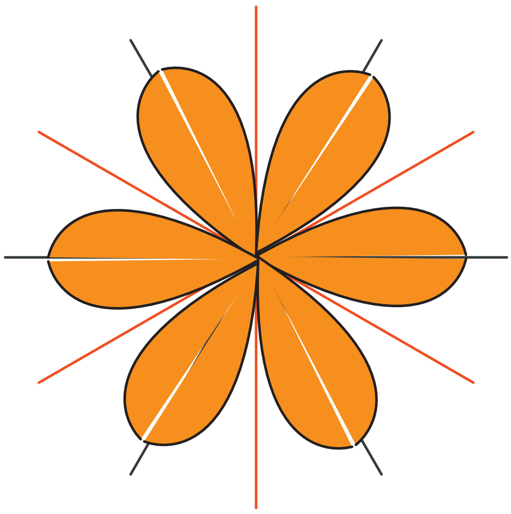


図 1　$p=6$ の場合：$\Pi_i(t)$ $(i=0,1,...,5)$ の概形

定理 5.2. (花びら定理)　$f(z)$ は上の通りとする。$t>0$ が十分小さいとき、各 $k\in\{0,1,...,p-1\}$ について
(a)　$f(\Pi_k(t))\subset \Pi_k(t)$,
(b)　$\Pi_k(t)$ 上局所一様に $f^n(z)\to 0$ かつ $\arg f^n(z)\to 2k\pi/p$ $(n\to\infty)$.

定理 *5.2* の略証. f は $\{z : |z| < r_0\}$, $r_0 < 1$, で定義されているとする。$\zeta = e^{2\pi ki/p}$, $h(z) = \zeta$ とおくと $h(\Pi_0(t)) = \Pi_k(t)$ かつ

$$h^{-1}fh(z) = z - z^{p+1} + bz^{2p} + c\zeta z^{2p+2} + \cdots$$

は (3) の右辺と同じ形の展開になる。よって $k = 0$ の場合を考えればよい。$S = \{re^{i\theta} : |\theta| < \pi/p\}$ 上で $\sigma(z) = 1/z^p$ を考えると

$$\sigma : S \to W = \{re^{i\theta} : |\theta| < \pi\}$$

は正則同相であり、その逆写像 σ^{-1} が定義できる。

$$\frac{1}{f(z)^p} = \frac{1}{z^p(1 - z^p + bz^{2p} + \cdots)^p} = \frac{1}{z^p}(1 + pz^p + Az^{2p} + \cdots).$$

したがって

$$g(w) = \sigma f \sigma^{-1}(w) = \left(\frac{1}{f(1/w^p)}\right)^p = w + p + \frac{B}{w} + \frac{B_2}{w^2} + \frac{B_3}{w^3} + \cdots .$$

($|w|$ が十分大きいとき $g(w)$ は平行移動 $w \mapsto w + p$ にほとんど等しいことに注意!) $w = \sigma(z)$ とおくと

$$z \in \Pi_0(t) \iff \frac{1}{|w|} < t\left(1 + \frac{\mathrm{Re}(\overline{w})}{|w|}\right).$$

ここで $w = x+iy$ とおくと右辺は $t^{-1}-x < \sqrt{x^2 + y^2}$ に等しくて、$-t^{-1}+x < \sqrt{x^2 + y^2}$ はいつでも成り立つから

$$z \in \Pi_0(t) \iff \frac{1}{2t} - \frac{t}{2}y^2 < x, \quad (w = \sigma(z) = x + iy).$$

すなわち $\Pi = \sigma(\Pi_0(t))$ は放物線 $(2t)^{-1} - (t/2)y^2 = x$ の右側にある領域で、 $2K = 1/t$ とおくと

$$\Pi = \left\{w = x + iy : y^2 > 4K(K - x)\right\}.$$

$g(w) = w + p + Q(w)/w$ とすれば $Q(w) = B + B_1/w + B_2/w^2 + B_3/w^2 + \cdots$ は ∞ の近傍で正則である。(a),(b) をしめすには $t > 0$ が十分小さいとき $g(\Pi) \subset \Pi$ であることを、任意のコンパクト集合 $Q \subset \Pi$ と $M > 0$ に対してある n_0 があって $n > n_0$ ならば $\mathrm{Re}(g^n(z)) > M$ であることをしめせばよい。実際

$$\frac{1}{2t} > \max\{r_0^{-p}, 3(|A| + B)\}$$

とすると、計算によって

$$g(\Pi) \subset \Pi \tag{4}$$

かつ

$$\mathrm{Re}(g^n(w)) > \mathrm{Re}(w) + np/2 \tag{5}$$

がしめせる。これらの証明は演習問題 (問題 5.1) に回す。

定義. $f(z)$ は ζ の近傍で正則で、

$$f(z) = z + a(z-\zeta)^{p+1} + a_{p+2}(z-\zeta)^{p+2} + \cdots \quad (p \geq 1, a \neq 0)$$

の展開をもつとする。このとき ζ 近傍で定義された正則関数 g で $g(\zeta) = 0, g'(\zeta) \neq 0$ をみたすものが存在して

$$gfg^{-1}(z) = z - z^{p+1} + A_{2p+1}z^{2p+1} + \cdots$$

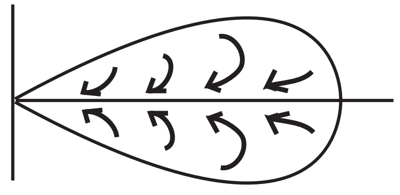
となるとき、十分小さい $t > 0$ に対して定義される $\mathcal{P}_k(t) = g^{-1}\Pi_k(t)$ $(k = 0, 1, ..., p-1)$ を ζ のまわりの f の花弁状領域 (petal) という。定理 5.2 より次のことが成り立つ (これも「花びら定理」と呼ぶことにする): $t > 0$ が十分小さいとき、各 $k \in \{0, 1, ..., p-1\}$ について

(a) $f(\mathcal{P}_k(t)) \subset \mathcal{P}_k(t)$,

(b) $\mathcal{P}_k(t)$ 上局所一様に $f^n(z) \to \zeta$ かつ $\arg f^n(z) \to 2k\pi/p$ $(n \to \infty)$.

(c) $\mathcal{P}_k(t)$ の境界曲線は ζ の近くで $\arg z = 2k\pi/p \pm \pi/p + \arg(-a)^{1/p}$ に漸近する。

図 2　花びら内における f の反復合成の力学系



5.2 有理放物的周期点

R を有理関数、ζ を有理放物的周期点 (簡単のため $\zeta \in \mathbb{C}$ とする)、すなわち ζ は R の周期点で、その周期を m とすると

$$R^m(z) = \zeta + e^{2\pi i a/b}(z-\zeta) + a_2(z-\zeta)^2 + \cdots,$$

ここで a/b は既約分数。このとき

$$R^{mb}(z) = z + b_{p+1}(z-\zeta)^{p+1} + b_{p+2}(z-\zeta)^{p+2} + \cdots, \quad (b_{p+1} \neq 0, p \geq 1).$$

さらに $(R^{mb})^n(z) = z + nb_{p+1}(z-\zeta)^{p+1} + \cdots$ となる。したがって
(5.2.1) $\zeta \in J(R^{mb}) = J(R)$.

今、$a \in \mathbb{C}$ を適当に選んで R を $\sigma^{-1}R\sigma$, ただし $\sigma(z) = az + \zeta$, に置換ることによって $\zeta = 0$ かつ

(6) $$R^{mb}(z) = z - z^{p+1} + b_{p+2}z^{p+2} + \cdots, \quad (p \geq 1)$$

の形であるとする。Petal Theorem より 0 のまわりの petal $\mathcal{P}_k$ $(k = 0, ..., p-1)$ が存在して

(a) $R^{mb}(\mathcal{P}_k) \subset \mathcal{P}_k$,
(b) $\mathcal{P}_k$ 上局所一様に $(R^{mb})^n(z) \to 0$ $(n \to \infty)$,
(c) $\mathcal{P}_k$ の境界曲線は 0 の近くで $\arg z = 2k\pi/p \pm \pi/p$ に漸近する。

とくに $\mathcal{P}_k \subset F(R^{mb}) = F(R)$.

補題を一つ準備する。

補題 5.3. $f(z)$ は $z = 0$ の近傍で正則で (6) の右辺と同じ展開をもつとする。$\eta_0, ..., \eta_{p-1}$ を -1 の p 乗根とすると、ある正数 r_0, θ_0 が存在して

$$S_j = \{z : 0 < |z| < r_0,\ |\arg(z/\eta_j)| < \theta_0\} \quad (j = 0, ..., p-1)$$

において $|f(z)| > |z|$.

証明. $f(z)/z = 1 + z^p(1 + v(z))$ とおくと v は 0 の近傍で正則で $v(0) = 0$. $0 < \rho < 1$ を 1 を中心半径 ρ の円板が sector $\{z : |\arg z| < \pi/4\}$ に含まれるように選ぶ。r_0 を

十分小さく選んで $D_{r_0} = \{|z| < r_0\}$ 上で $|v(z)| < \rho$ となるようにする。このとき $|\arg(1+v(z))| < \pi/4$.

次に $\theta_0 < \pi/(4p)$ となる正数とする。すると $z \in S_j$ のとき

$$|\arg[-z^p(1+v(z)]| = |p\arg(z/\eta_j) + \arg(1+v(z))| < \pi/2$$

かつ

$$|-z^p(1+v(z))| > |z|^p(1-\rho) > 0.$$

したがって $f(z)/z$ は半平面 Re $z > 1$ に含まれることになり $|f(z)/z| > 1$. □

定理 5.4. $\mathcal{P}_k$ を含む $F(R)$ の成分を F_k とおくと $F_0, ..., F_{p-1}$ は互いに異なる。

証明. $f = R^{mb}$ とおく。f は 0 のある近傍 N で同相である。0 の周りの petals と補題 5.4. における r_0 を十分小さくとって

$$W = \{0\} \cup (\mathcal{P}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_{p-1}) \cup (S_0 \cup \cdots S_{p-1}) \subset N$$

となるようにする。W は 0 の近傍となり、$t > 0$ を十分小さくとれば $D_t = \{|z| < t\} \subset W$. $\{f^n\}$ は F_k 上で正規族で、$\mathcal{P}_k$ 上 $f^n(z) \to 0$ だから、問題 1.8 より

$$F_k \text{ 上局所一様に} \quad f^n(z) \to 0 \ (n \to \infty). \tag{7}$$

$z \in F_k$ とする。$0 \in J(R)$ ゆえ、すべて n のについて $f^n(z) \neq 0$. (7) よりある n が存在して

$$0 < |f^n(z)| < |f^{n-1}(z)| < t.$$

これより $f^n(z) \notin \bigcup_{j=0}^{p-1} S_j$. よって $f^n(z) \in \mathcal{P}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_{p-1}$.

$$D_j = \{z \in \bigcup_{k=0}^{p-1} F_k : \text{ある } n \text{ が存在して } f^n(z) \in \mathcal{P}_j\}$$

とおくと上のことから $F_k \subset D_0 \cup \cdots \cup D_{p-1}$.

f は連続なので各 D_k は開集合。$z \in D_i \cap D_j$ $(i \neq j)$ とするとある n, m があって

$$f^n(z) \in \mathcal{P}_i, \quad f^m(z) \in \mathcal{P}_j.$$

もちろん $n \neq m$ である。一般性を失わず $n > m$ とすると $f\mathcal{P}_j \subset \mathcal{P}_j$ より $f^n(z) = f^{n-m}f^m(z) \in f^{n-m}\mathcal{P}_j \subset \mathcal{P}_j$ となり矛盾。よって

$$D_i \cap D_j = \emptyset \ (i \neq j).$$

今 $\mathcal{P}_k \subset F_k \cap D_k$ ゆえ D_k は空でない。F_k の連結性より $F_k \subset D_k$ $(k = 0, ..., p-1)$. したがって $F_k = D_k$ となり $F_i \cap F_j = \emptyset$ $(i \neq j)$. $\square$

6 Julia 集合における反発的周期点の稠密性

この章では定理 3.7 の証明を完結させる。

6.1 補題 3.6 の証明

R を $d = \deg R \geq 2$ の有理関数とする。

$$R(z, w) = (1 - w)R(z) + w$$

を定めるとき

命題 6.1. R は少なくとも N 個の中立的周期点をもてば、実数 $\epsilon > 0$ と θ (mod 1 で考える) が存在して

$$R_\rho(z) = R(z, \rho e^{2\pi i\theta}), \quad (0 < \rho < \epsilon)$$

の少なくとも $N/2$ 個の吸引的周期点は $\rho \to 0$ のとき R の相異なる中立的周期点に収束する。

証明. $\{z_1, ..., z_N\}$ を N の中立的周期点とし、n_i, s_i をそれぞれ z_i の周期と固有値とする。したがって $(z_i, 0)$ は

$$F_i(z, w) = R^{n_i}(z, w) - z = 0$$

の根で

$$\frac{\partial R^{n_i}}{\partial z}(z_i, 0) = s_i.$$

$F_i(z, w) = 0$ は代数方程式だから、新しい変数 w_i と正整数 m_i および $w_i = 0$ の近傍で定義された正則関数 $z_i(w_i)$ が存在して $z = z_i(w_i), w = w_i^{m_i}$ は

$$z_i(0) = z_i \ , \quad F_i(z_i(w_i), w_i^{m_i}) = 0$$

をみたす。

例. 有理関数

$$R(z) = \frac{z^2 - z}{1 + (1 - 2i)z}$$

は不動点 0, $-I$ をもち、それらの固有値はそれぞれ $-1, i$ であるから中立的である。

$$z_k(w_k) = \frac{-1+(1-i)w_k+(-1)^k\sqrt{1-2w_k+(1-2i)w_k^2}}{-2i+w_k}, \qquad k=1,2,$$

とおくと、これらはそれぞれ $w_k = 0$ の近傍で正則で、$z_1(0) = -i$, $z_2(0) = 0$. $F_k(z,w) = R(z,w) - z$ とおくとき $F_k(z_k(w_k), w_k) = 0$ $(k = 1,2)$. □

まず

$$s_i(w_i) = \frac{\partial R^{n_i}}{\partial z}(z_i(w_i), w_i^{m_i}) \qquad (i = 1, ..., N)$$

を定めるが、i ごとに変数が異なるのは面倒なので m を $m_1, ..., m_N$ の最小公倍数とし、$w = v^m$ すなわち $w_i = v^{m/m_i}$ を導入して

$$t_i(v) = s_i(v^{m/m_i}) = \frac{\partial R^{n_i}}{\partial z}(z_i(v^{m/m_i}), v^m) \qquad (i = 1, ..., N)$$

とおく。すると命題の証明は次のことをしめすことに帰着される。

(6.1.1) $\epsilon_1 > 0$ と θ_1 が存在して $0 < \rho < \epsilon_1$ のとき $|t_i(e^{2\pi i\theta_1}))|$ の半数以上は 1 より小さい。

t_i を展開すると

$$t_i(v) = s_i + a_i v^{k_i} + o(|v|^{k_i}), \qquad a_i \neq 0$$

となる。なぜなら、もし $t_i(v) = s_i$ (定数) ならば、0 から 1 を結ぶ適当な path に沿って $t_i(v)$ を解析接続したとき、終点での値が 0 になるから ($R(z,1) = 1$ したがって $R^{n_i}(z,1) = 1$, $(\partial R^{n_i}/\partial z)(z,1) = 0$ に注意) $s_i = 0$. これは $|s_i| = 1$ に反するからである。

$$\tilde{t}_i = (v) = s_i + a_i v^{k_i}$$

とおく。もし $\epsilon_1 > 0$ と θ_1 が存在して $0 < \rho < \epsilon_1$ のとき $|\tilde{t}_i(\rho e^{2\pi i\theta_1})|$ の半数以上は 1 より小さいことがいえれば、ϵ_1 をさらに小さく取り直すことによって (6.1.1) がしたがう。

$a_i = r_i e^{2\pi i\xi_i}$ とおくと

$$\tilde{t}_i(\rho e^{2\pi i\theta_1}) = s_i + r_i\rho^{k_i}e^{2\pi i(k_i\theta_1+\xi_i)}.$$

十分小さい ρ に対して $|\tilde{t}_i(\rho e^{2\pi i\theta_1})| < 1$ であるためには θ_1 を $2\pi(k_i\theta_1 + \xi_i)$ と $\arg(-s_i)$ の差が $\pi/2$ より小さくなるように選べばよい。すなわち $\varphi_i = (1/2\pi)\arg(-s_i) - \xi_i$ とおくと

$$k_i\theta_1 \in I_i = (\varphi_i - 1/4,\ \varphi_i + 1/4) \qquad \mathrm{mod}\ 1$$

であればよい。以下 mod 1 で考える。$J_i = (\varphi_i + \frac{1}{4},\ \varphi_i + \frac{3}{4})$ を I_i の閉包の補集合とする。まず整数倍して $\varphi_1 + 1/4, \varphi_1 - 1/4, ..., \varphi_N + 1/4, \varphi_N - 1/4$ のどれかとなる数は可算個だから、そうではない θ_2 を一つ選ぶ。このとき

$$k_i\theta_2 \in I_i \cup J_i \quad (i = 1, ..., N).$$

2^l を $k_1, ..., k_N$ のどれかを割り切る最大の 2 のべきとする。もし 2^l で割り切れる k_i のうちの半数以上が I_i に含まれるときは $b_l = 0$, そうでないときは $b_l = 1$ とおく。$\varphi \in I_i \Leftrightarrow \varphi + 1/2 \in J_i$ に注意すれば、そうした k_i の半数以上は $k_i/2^{l+1} \equiv 1/2 \mod 1$ なので

$$k_i(\theta_2 + b_l/2^{l+1}) \in I_i$$

がわかる。次に 2^{l-1} で割り切れるが 2^l で割り切れない k_i たちを考える。$b_{l-1} \in \{0, 1\}$ を

$$k_i(\theta_2 + b_{l-1}/2^l + b_l/2^{l+1})$$

の半数以上が I_i に含まれるように選ぶ。このとき 2^l で割り切れる k_i については

$$k_i(\theta_2 + b_{l-1}/2^l + b_l/2^{l+1}) \equiv k_i(\theta_2 + b_l/2^{l+1}) \mod 1$$

だから、$k_i(\theta_2 + b_{l-1}/2^l + b_l/2^{l+1})$ の半数以上は I_i に含まれることには変わりがない。次に 2^{l-2} で割り切れて 2^{l-1} で割り切れない k_i たちに移る。以下このプロセスを繰り返すことによって $b_0, b_1, ..., b_l \in \{0, 1\}$ を

$$k_i(\theta_2 + b_0/2 + b_1/2^2 + \cdots + b_l/2^{l+1}) \qquad (i = 1, 2, ..., N)$$

の半数以上が I_i に含まれるように選ぶことができる。$\theta_1 = \theta_2 + b_0/2 + b_1/2^2 + \cdots + b_l/2^{l+1}$ とおけばよい。 □

補題 *3.6* の証明. 今 R が N 個の中立的サイクルをもっていたとする。各サイクルから一つずつ点 $p_1, ..., p_N$ を選んで命題 6.1 の証明における $z_1, ..., z_N$ とする。このとき実数 $\epsilon > 0$ と θ が存在して $R_\rho(z) = R(z, \rho e^{2\pi i\theta}), \quad (0 < \rho < \epsilon)$ の少なくとも $N/2$ 個の吸引的周期点は $\rho \to 0$ のとき $p_1, ..., p_N$ のどれかに収束する。ρ が十分小さいときこれらの吸引的周期点は異なるサイクルに属するので定理 4.8 より $N/2 < 2d - 2$. したがって

$$(\text{吸引的サイクルの個数}) + (\text{超吸引的サイクルの個数}) + (\text{中立的サイクルの個数}) \le 6d - 6.$$

(超) 吸引的サイクルと中立的サイクルの周期を $n_k,\ 0 \le k \le p(\le 6d - 6)$, をとすると (超) 吸引的周期点と中立的周期点の個数 $n_1 + \cdots + n_p < \infty$. □

定理 *3.7* の証明. $z \in J$ とする。補題 3.5 より R の周期点の列 $\{z_n\}_n^\infty$ で z に収束するものがる。(超) 吸引的周期点と中立的周期点は有限個しかないので、ある番号 n_0 があって $n > n_0$ ならば z_n は反発的周期点 □

上の証明は [Bla, (5.12)] に拠った。最後に宍倉光広氏の定理を紹介しておこう。

定理.[Shis] R を $d = \deg R \geq 2$ の有理関数とするとき

(吸引的サイクルの個数)$+$(超吸引的サイクルの個数)$+$(中立的サイクルの個数) $\leq 2d-2$.

参考文献

[Ahl] Ahlfors, L. V., *Complex Analysis*, McGrow-Hill.

[Bla] Blanchard, P, Complex Analytic Dynamics on the Riemann sphere, Bull. Amer. Math. Soc., **11** (1984) 85–141.

[Bea] Beardon, A. F., *Iteration of Rational Functions*, Graduate Texts in Math. **132**, Springer-Verlag, 1991.

[Mil] Milnor, J. *Dynamics in One Complex Variable, Introductory Lectures*, Vieweg, 1999.

[Shig] 志賀啓成, 複素解析学 II, 培風館数学レクチャーノート入門編 6, 1999.

[Shis] Shishikura, M., On the quasiconformal surgery of rational functions. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **20** (1987), 1–29.

あとがき

これは名古屋大学大学院多元数理科学研究科での 2001 年度後期の数理解析特論 3 (4 年生対象)、解析学概論 IV(大学院生対象) の講義ノートです。「講義ノート」は保存用に加工された食品のようなもので生ものである「講義」の内容と同じではありません。講義では正規族に 3 回の講義時間を充てました。またもっと多くの図を用いることができました。

内容については、残念ながら複素力学系の現代理論にまで踏み込む時間的余裕はなく、D. Sullivan の基本定理 (有理関数の反復合成についての遊走領域の非存在と周期的 Fatou 成分の分類) を解説することができなかったのは残念ですが、少なくともこの講義を聴講した人に「正規族」の概念の（あるいは Montel の定理の）重要性が伝わったならばこの講義は成功だったと思います。この講義は文献表にある Beardon の本を大いに参照しました。これは複素力学系について懇切丁寧に書かれているので、この分野に興味がある方にはこの本を推薦します。また和書による入門書があります。

上田哲生・谷口雅彦・諸沢俊介著「複素力学系序説」培風館

整関数や多変数の複素力学系についても解説されています。

この講義の主目的は「Julia 集合において反発的周期点は稠密である」ことの証明でした。この定理の別証明を次の論文に見つけることができます。

Bergweiler, W., The role of the Ahlfors five islands theorem in complex dynamics, Conform. Geom. Dyn., **4** (2000), 22–34.(電子雑誌)

最後に，この講義を聴講してくれた学生の皆さんに深く感謝します。

7 演習問題集

注意. 必ずしも問題順に解答する必要はない。後に現れる問題がヒントとなることもある。

7.1 「有理関数の反復合成」に関する問題

問題 1.1. $R(z) = z^2 - 2$ の周期点について調べよ。

問題 1.2. $R(z)$ を有理関数とする。p を自然数とするとき $F(R^p) = F(R)$ (したがって $J(R^p) = J(R)$) であることを証明せよ。ただし R^p は R の p 回反復合成である。

問題 1.3. $R(z)$ を有理関数とする。$R(w) = \infty$ のとき w が R の通常点であるか特異点であるかを w における R の Laurent 展開を用いて特徴づけよ。

X, Y を距離空間とし d_Y で X の距離を表わすことにする。写像 $f : X \to Y$ の族 $\mathcal{F}$ が**正規族**であるとは、$\mathcal{F}$ の任意の部分列 $\{f_n\}$ が局所一様収束(すなわち X の任意のコンパクト部分集合上一様収束する)部分列を含むことである。すなわち、ある部分列 $\{f_{n_j}\}$ とある写像 $f : X \to Y$ が存在して、任意の $\epsilon > 0$ と任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対して、ϵ と K のみに依存する番号 J が存在して

$$J < i \text{ をみたせば、すべての } z \in K \text{ に対して} \qquad d_Y(f_{n_j}(z), f(z)) < \epsilon$$

となることである。

問題 1.4. $\overline{\mathbb{C}}$ の距離を球面距離で考えるとき、有理関数 $R : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ は連続関数であることをしめせ。

問題 1.5. $\overline{\mathbb{C}}$ の距離は球面距離で考えることにする。U, V をそれぞれ $\overline{\mathbb{C}}$ の領域、$g : V \to \overline{\mathbb{C}}$ は関数とする。

g は一様連続であるとする。 U 上で定義され V に値をもつ関数族 $\mathcal{F}$ が正規族で、$\mathcal{F}$ のすべての収束部分列の極限関数が U のすべての点で V に値をもつならば、$\mathcal{F}' = \{g \circ f : f \in \mathcal{F}\}$ が正規族になることを証明せよ。

注. g が**一様連続**であるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して

$$z, w \in V \text{ が } d(z, w) < \delta \text{ をみたせば} \qquad d(g(z), g(w)) < \epsilon$$

が成り立つことである。

問題 1.6. $U = \{z : 0 < |z| < 1\}$ 上定義された関数族 $\mathcal{F} = \{f_n(z) = z^n\}_{n=1}^{\infty}$ と $g(z) = e^{1/z}$ に対して $\mathcal{F}' = \{g \circ f_n : n = 1, 2, \cdots\}$ は正規族にならないことをしめせ。

問題 1.7. $\overline{\mathbb{C}}$ の距離は球面距離で考えることにする。U, V をそれぞれ $\overline{\mathbb{C}}$ の領域、$g : U \to V$ は連続関数とする。V 上で定義され $\overline{\mathbb{C}}$ に値をもつ関数族 $\mathcal{F}$ が正規族ならば、$\mathcal{F}' = \{f \circ g : f \in \mathcal{F}\}$ が正規族になることを証明せよ。

問題 1.8. $\{f_n\}$ は領域 D 上の正則関数族からなる正規族とする。もし D のある空でない開部分集合 W で f_n がある関数 f に点別収束すれば、D 上の正則関数 F で、$F|_W = f$ をみたすものが存在し、 f_n は F に局所一様収束する。このことを証明せよ。

問題 1.9. $P(z) = z^2 - 2$ とする。

(i) 区間 $[-2, 2]$ (したがって、その補空間 $\Omega = \overline{\mathbb{C}} - [-2, 2]$) は R について完全不変であることをしめせ。

(ii) $\{P^n|_\Omega\}_{n=1}^{\infty}$ は正規族であることを示せ。

(iii) 上の (ii) より $F(P)$ は連結であることをしめせ。さらに $z \in F(P)$ ならば $P^n(z) \to \infty$ $(n \to \infty)$ であることをしめせ。(問題 1.8 の結果をもちいる。)

(iv) $J(P) = [-2, 2]$ であることを証明せよ。

問題 1.10. $\overline{\mathbb{C}}$ からそれ自身への正則同型全体の集合は

$$\mathbf{M\ddot{o}b} = \left\{ g(z) = \frac{az+b}{cz+d} : a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0 \right\}$$

である。その元を Möbius 変換という。 **Möb** は写像の合成に関して群をなす。2 次の特殊線形群

$$SL(2,\mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{C}, \quad ad-bc = 1 \right\}$$

から **Möb** への対応を

$$\chi(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

で定める。 χ が (群の間の) 全射準同型であり

$$\ker\chi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

であることをしめせ。

問題 1.11. 球面距離 $d(\cdot,\cdot)$ は球面計量 $ds^2 = \dfrac{4|dz|^2}{(1+|z|^2)^2}$ によって定まる。すなわち $z, w \in \overline{\mathbb{C}}$ に対して

$$d(z,w) = \inf_C \int_C \frac{2|dz|}{1+|z|^2}.$$

ただし inf は z と w を結ぶ区分的 C^1 級曲線全体についてとる。実際、立体射影 $\pi : \mathbb{S}^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ による $\pi^{-1}(z)$ と $\pi^{-1}(w)$ を結ぶ短い方の大円弧の像 C 上の線積分が inf を与える。

(1) Möbius 変換 $g(z)$ が ds^2 について等長的ならば $(g^*(ds^2) = ds^2)$,

$$g(z) = \frac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}}, \quad a,b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2+|b|^2 = 1,$$

の形になることを示せ。

(ヒント: $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ が球面計量について等長的であることを数式で表わすと

$$\frac{2|g'(z)dz|}{1+|g(z)|^2} = \frac{2|dz|}{1+|z|^2} \iff |az+b|^2 + |cz+d|^2 = 1+|z|^2 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

である。)

(2) $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc=1)$ に対して $\|g\| = (|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2)^{1/2}$ とおく。g は球面距離について Lipschitz 連続であることをしめせ。実際

$$d(g(z), g(w)) \leq M d(z, w), \qquad M = \frac{1}{2}[(\|g\|^4 - 4)^{1/2} + \|g\|^2],$$

が成り立つ。

(ヒント: $\Phi(g, z) = \dfrac{1+|z|^2}{|az+b|^2+|cz+d|^2}$ とおくとき $\sup|\Phi(g,z)|$ を求めればよい。しかしこのままでは計算しづらいので $\Phi(h \circ g, z) = \Phi(h, g(z))\Phi(g, z)$ をもちいて

$$\sup|\Phi(g,z)| = \sup \frac{1}{|\Phi(g^{-1}, g(z))|} = \sup \frac{1}{|\Phi(g^{-1}, z)|}.$$

を計算したほうがよい。)

問題 1.12. (1) $\overline{\mathbb{C}}$ 上の球面弦距離を

$$d_0(z,w) = \begin{cases} \dfrac{2|z-w|}{(1+|z|^2)^{1/2}(1+|w|^2)^{1/2}} & (z, w \in \mathbb{C} \text{ のとき}) \\[2ex] \dfrac{2}{(1+|z|^2)^{1/2}} & (z \in \mathbb{C},\ w = \infty \text{ のとき}) \\[2ex] 0 & (z = w = \infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める。球面弦距離と球面距離 $d(\cdot,\cdot)$ との間に

$$d_0(z,w) = 2\sin\left(\frac{d(z,w)}{2}\right)$$

の関係が成り立つことをしめせ。さらに次の不等式をしめせ。

$$(2/\pi)d(z,w) \leq d_0(z,w) \leq d(z,w).$$

(2) $m > 0$ とする。 Möbius 変換 g で

$$d(g(0), g(1)) \geq m, \quad d(g(1), g(\infty)) \geq m, \quad d(g(\infty), g(0)) \geq m$$

をみたすもの全体は一様 Lipschitz 連続であること、すなわち m のみに依存する正定数 M があって

$$d(g(z), g(w)) \leq M d(z, w) \ (z, w \in \overline{\mathbb{C}})$$

となることを証明せよ。(上掲書, Theorem 2.3.3.)

7.2 「Fatou 集合と Julia 集合の性質（その１）–例外点」に関する問題

問題 2.1. R は有理関数で $\deg R \geq 1$ とする。$z, w \in \overline{\mathbb{C}}$ に対する関係 $\sim$ を次のように定める。

$$z \sim w \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \text{ある非負整数が } n, m \text{ が存在して } R^n(z) = R^m(w).$$

このとき関係 ‘ $\sim$ ’ が同値関係であることをしめせ。さらに z と同値な点の集合 $[z]$ が完全不変であることをしめせ。

問題 2.2. $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ が有理関数 R の完全不変集合ならば各 $z \in E$ に対して $[z] \subset E$ であることをしめせ。

問題 2.3. $\deg R \geq 1$ のとき、有理関数 R の Fatou 集合 $F(R)$（したがって Julia 集合 $J(R)$) は R について完全不変であることを証明せよ。

問題 2.4. R を有理関数とし、$d = \deg(R)$ とする。

(1) R は例外点を一つだけもち、それが ∞ であるとき、$R(z)$ は多項式であることをしめせ。

(2) R は例外点を 2 つだけもち、それらが $0, \infty$ であるとする。もし $R(0) = 0$, $R(\infty) = \infty$ ならば $R(z) = az^d$ (a はある 0 でない複素数) の形であることをしめせ。

(3) R は例外点を 2 つだけもち、それらが $0, \infty$ であるとする。もし $R(0) = \infty$, $R(\infty) = 0$ ならば $R(z) = az^{-d}$ (a はある 0 でない複素数) の形であることをしめせ。

(4) $d \geq 2$ ならば、上のいずれの場合も例外点は R の Fatou 集合 $F(R)$ に含まれることをしめせ。

問題 2.5. R を有理関数、$g \in \mathbf{M\ddot{o}b}$ とするとき、$F(g \circ R \circ g^{-1}) = g(F(R))$ (したがって $J(g \circ R \circ g^{-1}) = g(J(R))$) であることを しめせ。

問題 2.6. R を 1 次の有理関数、すなわち Möbius 変換とする:

$$R(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1).$$

ただし

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。R の Fatou 集合、Julia 集合を求めよ。(ヒント: 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を共役によって Jordan 標準形にしてから考えると便利。)

7.3 「Julia 集合 と Fatou 集合の性質 (その 2) –Julia 集合は完全集合」に関する問題

問題 3.1. 完全集合は非可算無限濃度をもつことをしめせ。ただし $\overline{\mathbb{C}}$ (あるいは一般にコンパクト・ハウスドルフ位相空間 X) の部分集合 A が完全集合であるとは A の集積点集合 (導来集合) が A と一致するときにいう。

問題 3.2. $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ は有限集合とする。$\deg R \geq 1$ である有理関数 R に対して $R^{-1}(E) \subset E$ ならば E は R について完全不変であることをしめせ。

問題 3.3. $a \neq \pm 1$ とする。

$$R_a(z) = \frac{z^2 - z}{1 + az}$$

とおく。以下のことをしめせ。

(a) R_a の固定点は $0, \infty, \alpha = 2/(1-a)$ である (注)。
(b) R_a^2 の固定点は $0, 0, 0, \infty, \alpha$ である。
(c) R_a は 2-サイクルをもたないことをしめせ。

(d) もし、ある $g \in \mathbf{M\ddot{o}b}$ が存在して $g \circ R_a \circ g^{-1} = R_b$ ならば

$$b = a \quad \text{または} \quad b = \frac{3-a}{1+a}.$$

問題 3.4. $P(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ $(a_2 \neq 0)$ を 2 次の多項式とするとき、ある $g \in \mathbf{M\ddot{o}b}$ が存在して $g^{-1} \circ P \circ g$ は $z^2 + c$ の形の多項式になることをしめせ。

7.4 「吸引的周期点」に関する問題

問題 4.1. R を有理関数とし、$p \in \overline{\mathbb{C}}$ を R の周期 N の吸引的周期点とする。$A(p, R^N)$, $A(R(p), R^N)$ をそれぞれ $p, R(p)$ を含む直接吸引鉢とするとき、

$$R(A(p, R^N)) = A(R(p), R^N)$$

が成り立つことをしめせ。(補題 4.2.)

問題 4.2. (1) f_n を $z = \zeta$ の近傍 U で定義された正則関数列で次の展開をもつとする。

$$f_n(z) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}(z-\zeta) + a_2^{(n)}(z-\zeta)^2 + \cdots + a_k^{(n)}(z-\zeta)^k + \cdots .$$

もし任意の正数 K に対して $|a_1^n| < K$ をみたす n が有限個しかなければ $\{f_n\}$ は正規族でないことをしめせ。
(2) f を $z = \zeta$ の近傍で定義された正則関数で次の展開をもつとする。

$$f(z) = \zeta + \lambda(z-\zeta) + a_2(z-\zeta)^2 + \cdots + a_k(z-\zeta)^k + \cdots .$$

このとき f の n 回合成は $z = \zeta$ の近傍で

$$f^n(z) = \zeta + \lambda^n(z-\zeta) + a_2^{(n)}(z-\zeta)^2 + \cdots + a_k^{(n)}(z-\zeta)^k + \cdots .$$

の形に展開されることをしめせ。ただし $a_k^{(n)}$ $(k = 2, 3, ...)$ は $\lambda, a_2, a_3, ...,$ によって定まるある複素数である。
(3) ζ を有理関数 R の反発的周期点とするとき $\zeta \in J(R)$ となることをしめせ。(ヒント：上の設問と問題 1.2 を用いる。)

問題 4.3. $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ を次数 $n \geq 2$ をもつ 多項式とする。このとき無限遠点 ∞ は P の超吸引的不動点であることを しめせ。

7.5 「有理放物的周期点と花びら定理」に関する問題

問題 5.1 (花びら定理の完成) f を $D = \{z : |z| < r_0\}$ $(r_0 < 1)$ で定 義された正則関数で、原点でのテイラー展開が

$$f(z) = z - z^{p+1} + a_{2p+1} z^{2p+1} + a_{2p+2} z^{2p+2} + \cdots \quad (p \geq 1)$$

であるとする。$\sigma(z) = 1/z^p$ は $S = \{z = re^{i\theta} : |\theta| < \pi/p\}$ から $W = \mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ への正則な同相写像である。その逆写像を $\sigma^{-1} : W \to S$ で表わす。このとき

$$g(w) = \sigma f \sigma^{-1}(w) = w + p + \frac{A}{w} + \theta(w)$$

の形となる。ここで $A \in \mathbb{C}$, $\theta(w)$ は $\{w : |w| > r_0^{-p}\}$ で正 則で、ある $B > 0$ が存在して

$$|\theta(w)| < \frac{B}{|w|^{1+(1/p)}} \leq \frac{B}{|w|}$$

をみたす。

$$\Pi_0(t) = \{z = re^{i\theta} : r^p < t(1 + \cos p\theta),\ |\theta| < \pi/p\}$$

を一つの petal とする。十分小さい $t > 0$ に対して

(1) $f(\Pi_0(t)) \subset \Pi_0(t)$

(2) $\Pi_0(t)$ 上局所一様に $f^n(z) \to 0$ $(n \to \infty)$

をしめしたい。そのためには $\Pi = \sigma \Pi_0(t)$ とおくとき

(1') $g(\Pi) \subset \Pi$

(2') Π 上局所一様に $g^n(z) \to \infty$ $(n \to \infty)$

をしめせばよい。以下の問いに答えよ。

(i) 次のことをしめせ。

$$\Pi = \{w = x + iy : y^2 > 4K(K - x)\} \qquad \text{ただし} \quad K = 1/(2t).$$

さらに $w \in \Pi$ ならば $|w| > K$ である。

(ii) t を $K = 1/(2t)$ が

$$K > \max\{r_0^{-p}, 3(|A| + B)\}(> 1) \tag{1}$$

をみたすように選ぶと、$g(\Pi) \subset \Pi$ でることをしめせ。すなわち $w = x+iy, y^2-4K(K-x) > 0$ であるとき $g(w) = X + iY$ は $Y^2 - 4K(K-x) > 0$ をみたすことをしめす。(ヒント: $a + ib = A/w + \theta(w)$ とおくと $X = x + p + a$, $Y = y + b$ である。

$$|a + ib| \le (|A| + B)/|w| < K/(3|w|) < 2Kp/(3|w|) < 2p/3$$

が成り立つ。)

(iii) K が (1) をみたすとき、$w \in \Pi$ ならば

$$\mathrm{Re}[g(w)] > \mathrm{Re}[w] + p/2$$

であることをしめせ。これより

$$\mathrm{Re}[g^n(w)] > \mathrm{Re}[w] + np/2$$

が成り立つことがわかる。このことより (2') を証明せよ。

問題 5.2 上の問題と同じ設定の元で $t > 0$ が十分小さいとき $\Pi_0(t)$ 上局所一様に

$$\arg f^n(z) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であることをしめせ。

7.6 「Julia 集合における反発的周期点の稠密性」に関する問題

問題 6.1 (Julia 集合の描画アルゴリズム) $R(z)$ を $\deg R \ge 2$ をみたす有理関数とする。z_0 を R の反発的周期点とすると z_0 の逆像 $\{z_1, ..., z_{n_1}\} = R^{-1}(z_0)$ $(n_1 \le d)$ を複素平面にプロットし、また $z_1, ..., z_{n_1}$ のそれぞれについてその逆像をプロットし、以下この操作をつづけると R の Julia 集合の概形が得られる。このことを実行するコンピュータ・プログラムを作成し、

$$R(z) = \lambda z + z^2, \quad \lambda = 1 + \sqrt{-3}$$

(これは $z = 0$ を反発的不動点にもつ) の Julia 集合のグラフィックを提出すること。また $|\lambda| > 1$ となる λ をいろいろ代入して $J(R)$ を描画してみよ。